

ISSN 0235-9286

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

Выпуск 18

Под редакцией академика
Б. Б. КАДОМЦЕВА



МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1990

УДК 533.9.01

Вопросы теории плазмы: Сб. науч. ст. Вып. 18/ Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергоатомиздат, 1990.—320 с.

Приведены обзоры по динамике сверхзвуковой ленгмюровской турбулентности, теории регулярной и стохастической динамики, термоядерных α -частиц в токамаке и обзор физических явлений в пристеночной плазме токамаков.

Для научных сотрудников в области физики плазмы.

Редколлегия: А. А. Галеев, В. В. Параил, О. П. Погуце,
Д. Д. Рютов

**ДИНАМИКА СВЕРХЗВУКОВОЙ
ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ***Б. Н. Брейзман, К. Юнгвирт***1. Введение**

Ленгмюровская турбулентность традиционно привлекает внимание, с одной стороны, как важный фактор в задачах о пучковом и лазерном нагреве плазмы, а с другой — как объект, изучение которого позволяет успешно продвигаться в понимании общих проблем теории плазменной турбулентности. Так, в частности, именно с ленгмюровскими волнами были связаны первые работы по квазилинейной теории [1, 2], положившие начало созданию кинетики слаботурбулентной плазмы. Термин *слаботурбулентная* означает, что волны в плазме можно рассматривать как слабонеидеальный газ квазичастиц, взаимодействующих вследствие нелинейных эффектов [3—7]. Совокупность всевозможных элементарных процессов с участием квазичастиц описывается кинетическими уравнениями, вывод которых основан на теории возмущений и включает в себя процедуру усреднения по случайным фазам взаимодействующих волн. Такой подход оправдан до тех пор, пока сами волны не приводят к заметным искажениям дисперсионных свойств среды. Первая попытка выйти за рамки этого ограничения была предпринята А. А. Веденовым и Л. И. Рудаковым [8], обнаружившими так называемую *модуляционную неустойчивость*, связанную с модификацией закона дисперсии ионного звука под влиянием интенсивных ленгмюровских волн. Следующий важный шаг был сделан В. Е. Захаровым [9], предложившим упрощенные динамические уравнения для описания, нелинейной стадии этой неустойчивости и ряда других явлений, не укладывающихся в схему слабой турбулентности. На трехмерном варианте этих уравнений базируются исследования ленгмюровского коллапса [10, 11]. В одномерном случае, где коллапс отсутствует, уравнения Захарова служат основой рассмотрения динамики солитонов [12].

Несмотря на внешнюю простоту этих уравнений, возможности их аналитического решения оказались весьма ограниченными, из-за чего в работах по сильной ленгмюровской турбулентности наметился ощутимый крен в сторону численного моделирования, усиливающийся по мере расширения возможностей

вычислительной техники. Отдавая должное численному подходу, следует вместе с тем отметить, что он, как правило, требует все же предварительного качественного анализа динамики исследуемого процесса. В противном случае подчас складывается ситуация, когда режимы, наиболее привлекательные с чисто вычислительной точки зрения, оказываются недостаточно представительными физически. В особенности это относится к задачам, в которых встречается тот или иной малый параметр. Для задач, обсуждаемых в настоящем обзоре, таким параметром является отношение скорости звука к характерной групповой скорости ленгмюровских волн. Термин *сверхзвуковая турбулентность*, входящий в название обзора, подчеркивает малость данного параметра.

Наиболее существенным упрощением при описании сверхзвуковых плазмонов является переход к адиабатическому приближению. Он дает возможность расширить круг аналитически решаемых задач, что, в свою очередь, помогает объяснить ряд закономерностей, выявленных ранее при численном моделировании. Концентрируя внимание на адиабатических эффектах, мы тем самым намеренно сужаем тему данного обзора по сравнению с обзорами [10—15], где проблема сильной ленгмюровской турбулентности рассматривается более широко. Это позволит нам, не дублируя работ [10—15], уделить основное внимание тем результатам, которые были получены после выхода в свет этих работ.

2. Основные уравнения

Картина турбулентности в плазме без магнитного поля во многом определяется взаимодействием трех известных ветвей колебаний такой плазмы: ленгмюровской (l), электромагнитной (t) и ионнозвуковой (s)*. Дисперсионные соотношения для этих ветвей имеют следующий вид [16]:

$$\omega_l = \omega_p [1 + (3/2)k^2 r_D^2]; \quad (2.1)$$

$$\omega_t = (\omega_p^2 + k^2 c^2)^{1/2}; \quad (2.2)$$

$$\omega_s = kc_s / (1 + k^2 r_D^2)^{1/2}, \quad (2.3)$$

где ω_p — плазменная частота; r_D — дебаевский радиус; c — скорость света; c_s — скорость ионного звука; k — модуль волнового вектора.

Ленгмюровские и электромагнитные волны представляют собой электронные и потому высокочастотные возмущения. Час-

* Хотя собственно ионный звук существует только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$, влияние ионных возмущений на ленгмюровскую турбулентность оказывается весьма важным и при сопоставимых значениях T_e и T_i .

тоты звуковых волн, связанных с движением ионов, лежат значительно ниже. Это делает возможным усредненное описание воздействия l - и t - волн на звуковые в терминах пондеромоторной силы, возмущающей плотность плазмы. Что касается обратного влияния звуковых волн на высокочастотные, то оно в основном обусловлено локальными отклонениями плазменной частоты ω_p от среднего значения.

Приступая к выводу упрощенных уравнений, описывающих упомянутое взаимодействие волн, определим прежде всего, следуя [17], среднюю силу, действующую на частицу сорта α в высокочастотном электромагнитном поле:

$$\mathbf{E}_{\sim} = \text{Re}[\mathbf{E} \exp(-i\omega t)]; \quad (2.4)$$

$$\mathbf{H}_{\sim} = \text{Re}[\mathbf{H} \exp(-i\omega t)]. \quad (2.5)$$

Комплексные амплитуды поля \mathbf{E} и \mathbf{H} считаются здесь достаточно плавными функциями координат и времени, а скорость частицы предполагается малой по сравнению со скоростью света и с фазовой скоростью высокочастотной волны. В этом случае радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ на траектории частицы можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}_{\sim}(t), \quad (2.6)$$

где $\mathbf{R}(t)$ — плавно меняющееся слагаемое, а $\mathbf{r}_{\sim}(t)$ — малая осциллирующая добавка, удовлетворяющая линеаризованному уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{\sim} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E}_{\sim}(\mathbf{R}; t). \quad (2.7)$$

Для отыскания средней силы \mathbf{F} необходимо выделить в силе Лоренца квадратичные по осциллирующим величинам добавки. Это дает

$$\mathbf{F} = e_{\alpha} \left\langle (\mathbf{r}_{\sim} \nabla \mathbf{R}) \mathbf{E}_{\sim} + \frac{1}{c} \left[\frac{d\mathbf{r}_{\sim}}{dt} \times \mathbf{H}_{\sim} \right] \right\rangle. \quad (2.8)$$

Подставив сюда приближенное решение уравнения (2.7)

$$\mathbf{r}_{\sim} = -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega^2} \mathbf{E}_{\sim} \quad (2.9)$$

и воспользовавшись тем, что согласно уравнениям Максвелла

$$\mathbf{H} \approx -\frac{ic}{\omega} \text{rot } \mathbf{E}, \quad (2.10)$$

получим окончательно

$$\mathbf{F} = -\frac{e_{\alpha}^2}{4m_{\alpha}\omega^2} \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (2.11)$$

В дальнейшем при использовании формулы (2.11) в качестве ω будем выбирать невозмущенную плазменную частоту. Это подразумевает, что частота близка к ω_p не только у ленгмюровских, но также и у электромагнитных волн. Ограничиваясь рассмотрением только таких t -волн, исходим из того, что в реальных условиях электромагнитные волны с частотами, заметно превышающими ω_p , очень быстро покидают плазму, поскольку их групповые скорости сопоставимы со скоростью света.

При гидродинамическом описании медленных движений плазмы средняя сила, действующая на частицы данного сорта, складывается из пондеромоторной силы (2.11), а также сил, обусловленных низкочастотным электрическим полем и газокINETическим давлением. Для электронов, инерция которых в медленных движениях пренебрежимо мала, суммарная сила должна быть близка к нулю, что позволяет найти низкочастотное поляризационное поле \mathbf{E}' :

$$\mathbf{E}' = -\frac{e}{4m\omega_p^2} \nabla |\mathbf{E}|^2 - \frac{T_e}{en_0} \nabla n_e'. \quad (2.12)$$

Здесь n_0 — невозмущенная плотность, а n_e' — низкочастотное возмущение плотности электронов. При подстановке в формулу (2.12) электронного давления учтено, что в медленных движениях эффективный показатель адиабаты для электронов равен единице [16]. Отметим, что вследствие потенциальности пондеромоторной силы поляризационное поле также потенциально.

Пондеромоторная сила (2.11), действующая на ионы, пренебрежимо мала (из-за их большой массы). Если к тому же ионы имеют низкую температуру ($T_i \ll T_e$), то можно пренебречь и их давлением. В этом случае движение ионов целиком определяется поляризационным полем

$$M \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = e\mathbf{E}', \quad (2.13)$$

и в силу уравнения непрерывности линейное по полю \mathbf{E}' возмущение ионной плотности n_i' удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n_i' + \frac{e}{M} n_0 \operatorname{div} \mathbf{E}' = 0. \quad (2.14)$$

В случае квазинейтральных возмущений ($n_e' = n_i' \equiv n$) получающаяся система сводится к звуковому уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n - c_s^2 \Delta n = \frac{1}{16\pi M} \Delta |\mathbf{E}|^2, \quad (2.15)$$

правая часть которого содержит пондеромоторную силу. В более общем случае условие квазинейтральности заменяется уравнением Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E}' = 4\pi e (n_i' - n_e'). \quad (2.16)$$

Приведенные уравнения для низкочастотных возмущений нетрудно обобщить на случай горячих ионов. Для этого следует перейти к описанию ионов с помощью кинетического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{f}_i + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \hat{f}_i + eE' \frac{\partial}{\partial p} \hat{f}_i = 0, \quad (2.17)$$

решение которого определяет входящую в уравнение (2.15) величину n'_i :

$$n'_i = \int \hat{f}_i d\mathbf{p} - n_0. \quad (2.18)$$

Кинетический подход позволяет, в частности, учесть затухание Ландау звуковых волн на ионах.

Обратимся теперь к высокочастотным возмущениям. Из линеаризованных уравнений гидродинамики для электронов следует, что высокочастотная составляющая \mathbf{j}_{\sim} плотности электронного тока, создаваемого полем (2.4), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_{\sim} = \frac{e^2}{m} (n_0 + n) \mathbf{E}_{\sim} + \frac{3eT_e}{m} \nabla n_{e_{\sim}}, \quad (2.19)$$

где $n_{e_{\sim}}$ — возмущение плотности электронов, связанное с полем \mathbf{E}_{\sim} уравнением Пуассона:

$$\text{div } \mathbf{E}_{\sim} = -4\pi e n_{e_{\sim}}. \quad (2.20)$$

Из всех нелинейностей в уравнении (2.19) учтена только основная. Она связывает высокочастотные возмущения с низкочастотными и имеет вид $(e^2/m)n\mathbf{E}_{\sim}$, где n — низкочастотное возмущение плотности. При этом опущены, в частности, электронные нелинейности. Для такого упрощения требуется, чтобы длины всех рассматриваемых волн были достаточно велики по сравнению с дебаевским радиусом. Наряду с возможностью пренебречь электронными нелинейностями это требование обеспечивает также малость затухания Ландау ленгмюровских волн на электронах и квазинейтральность низкочастотных возмущений.

Подстановка тока (2.19) в уравнения Максвелла с учетом медленности изменения амплитуды высокочастотного поля во времени дает для амплитуды \mathbf{E} следующее уравнение [18]:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{3}{2} \omega_p r_D^2 \text{grad div } \mathbf{E} - \frac{c^2}{2\omega_p} \text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{\omega_p}{2} \frac{n}{n_0} \mathbf{E}. \quad (2.21)$$

В однородной плазме решениями уравнения (2.21) являются не взаимодействующие продольные (l) и поперечные (t) волны. При наличии неоднородности эти волны связаны друг с другом и требуют, вообще говоря, совместного рассмотрения. Однако имеется ряд ситуаций, когда потенциальная часть поля преобладает над вихревой, так что

$$\mathbf{E} \approx -\nabla\phi. \quad (2.22)$$

В этих случаях векторное уравнение (2.21) сводится к скалярному уравнению для φ [9]:

$$i \Delta \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \frac{3}{2} \omega_p r_D^2 \Delta \Delta \varphi = \operatorname{div} \left(\frac{\omega_p}{2} \frac{\eta}{n_0} \nabla \varphi \right). \quad (2.23)$$

Заметим, что для выделения потенциальной части поля недостаточно просто положить в уравнении (2.21) $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, а необходимо предварительно применить к этому уравнению операцию div , исключаящую слагаемое $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}$, вклад которого подчеркнут большим множителем $\sim c^2/v_{Te}^2$.

Уравнения (2.15), (2.22), (2.23) образуют замкнутую систему, полученную В. Е. Захаровым [9].

Для сокращения дальнейших выкладок приведем полученные уравнения к безразмерному виду, выполнив с этой целью замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow k_0^{-1} \mathbf{r}; & \mathbf{E} &\rightarrow (48\pi n_0 T_e)^{1/2} k_0 r_D \mathbf{E}; \\ t &\rightarrow \frac{1}{k_0 c_s} t; & n &\rightarrow 3n_0 k_0^2 r_D^2 n, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где выбор волнового числа k_0 определяется соображениями удобства.

В новых переменных уравнения (2.15), (2.21) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n - \Delta n = \Delta |\mathbf{E}|^2; \quad (2.25)$$

$$i g \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = n \mathbf{E}, \quad (2.26)$$

где $\alpha = c^2/(3v_{Te}^2)$.

Входящий в уравнение (2.26) безразмерный параметр

$$g \equiv \frac{2}{3k_0 r_D} \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \quad (2.27)$$

представляет собой удвоенное отношение скорости ионного звука к групповой скорости плазмонов с $k = k_0$.

3. Вариационный подход и интегралы движения

Для уравнений (2.25), (2.26) удается сформулировать вариационный принцип [19]. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int & \left[i \frac{g}{2} \left(\mathbf{E}^* \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^* \right) - \alpha |\operatorname{rot} \mathbf{E}|^2 - |\operatorname{div} \mathbf{E}|^2 + \right. \\ & \left. + |\mathbf{E}|^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi} \right)^2 - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})^2 \right] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Обобщенными координатами здесь являются величины \mathbf{E} , \mathbf{E}^* и потенциальный вектор смещения ионов от положения равновесия ξ , связанный с возмущением плотности n соотношением

$$n = -\operatorname{div} \xi. \quad (3.2)$$

Варьирование лагранжиана по этим переменным приводит к уравнениям

$$i g \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{E} \operatorname{div} \xi; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi - \operatorname{grad} \operatorname{div} \xi = -\operatorname{grad} |\mathbf{E}|^2, \quad (3.4)$$

первое из которых с учетом (3.2) идентично (2.26), а второе сводится к (2.25) с помощью операции div .

Лагранжиану (3.1) соответствуют следующие выражения для плотности импульса:

$$\mathcal{S}_\alpha = \frac{i g}{2} \left(E_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} E_\beta^* - E_\beta^* \frac{\partial}{\partial x_\alpha} E_\beta \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \xi_\alpha \right) \operatorname{div} \xi \quad (3.5)$$

и момента импульса

$$\mathfrak{M} = i g [\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*] + [\mathbf{r} \times \mathcal{S}]. \quad (3.6)$$

Вследствие инвариантности лагранжиана по отношению к пространственному сдвигу и повороту и по отношению к изменению начала отсчета времени полный импульс

$$\mathbf{P} = \int \mathcal{P} d\mathbf{r}, \quad (3.7)$$

момент импульса

$$\mathbf{M} = \int \mathfrak{M} d\mathbf{r} \quad (3.8)$$

и энергия системы

$$H = \int \left[\alpha |\operatorname{rot} \mathbf{E}|^2 + |\operatorname{div} \mathbf{E}|^2 - |\mathbf{E}|^2 \operatorname{div} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \xi \right)^2 + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \xi)^2 \right] d\mathbf{r} \quad (3.9)$$

являются интегралами движения. Из инвариантности лагранжиана по отношению к преобразованию $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} \exp(i\Phi)$, где Φ — вещественная константа, следует, что сохраняется полное число высокочастотных волн

$$N = \int |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

К перечисленным законам сохранения следует добавить еще законы сохранения числа и потока частиц:

$$\int n d\mathbf{r} = \text{const}; \quad (3.11)$$

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial t} \xi \right) d\mathbf{r} = \text{const}. \quad (3.12)$$

От лагранжевой записи уравнений (2.25), (2.26) нетрудно перейти к их гамильтоновой записи [19]. С учетом комплексной сопряженности обобщенных координат \mathbf{E} и \mathbf{E}^* гамильтониан системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \int & \left[-\frac{i\alpha}{g} (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{F}) - \frac{1}{g} (\text{div } \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{F}) + \right. \\ & \left. + \frac{i}{g} (\mathbf{E}\mathbf{F}) \text{ div } \xi + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} (\text{div } \xi)^2 \right] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Канонически сопряженными величинами являются здесь две пары переменных: \mathbf{E} , \mathbf{F} и ξ , η , причем $\mathbf{F} = ig\mathbf{E}^*$, а $\eta = \partial\xi/\partial t$.

Поведение рассматриваемой системы, равно как и других гамильтоновых систем, во многом зависит от свойств ограниченности гамильтониана при заданных значениях прочих интегралов движения. В одномерной задаче гамильтониан при любых фиксированных значениях \mathbf{P} и N ограничен снизу [19], причем его минимальное значение достигается на решении, описывающем ленгмюровский солитон [13, 14]

$$E(x; t) = E_* \frac{\exp\left(i \frac{gsx}{2} - i\Omega t + i\varphi_0\right)}{\text{ch}\left[E_* \frac{x - st - x_0}{\sqrt{2}(1-s^2)^{1/2}}\right]}; \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Omega & \equiv \frac{gs^2}{4} - E_*^2 \frac{1}{2g} \frac{1}{(1-s^2)}; \\ n(x; t) & = -|E(x; t)|^2 / (1-s^2), \quad |s| < 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь E_* , x_0 , φ_0 и s — вещественные константы. Для солитона интегралы (3.7), (3.9), (3.10) имеют вид

$$N = 2^{3/2} |E_*| (1-s^2)^{1/2}; \quad (3.16)$$

$$P = \frac{g^2 s}{2} N + \frac{N^3}{12} \frac{1}{(1-s^2)^3}; \quad (3.17)$$

$$H = \frac{g^2 s^2}{4} N + \frac{N^3}{48} \frac{5s^2 - 1}{(1-s^2)^3}. \quad (3.18)$$

В двумерной и трехмерной задачах нижней границы гамильтониана не существует [19]. Чтобы продемонстрировать неограниченность гамильтониана в случае двух и трех измерений, рас-

смотрим распределение поля \mathbf{E} , зависящее только от радиуса, и выберем возмущение плотности n в виде

$$n = -|\mathbf{E}|^2. \quad (3.19)$$

Импульс и момент импульса системы равны при этом нулю, а выражение для гамильтониана принимает вид

$$H = C \int \left[\frac{1}{r^{2p-2}} \left| \frac{\partial}{\partial r} r^{p-1} E \right|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^4 \right] r^{p-1} dr, \quad (3.20)$$

где $C > 0$, а параметр p ($p=2, 3$) указывает размерность задачи. Подвергнем теперь распределение (3.19) преобразованию подобия (сжатию)

$$E \rightarrow \lambda^{p/2} E(\lambda r); \quad n \rightarrow \lambda^{pn} n(\lambda r), \quad (3.21)$$

сохраняющему число волн и число частиц. Подставив соотношение (3.21) в формулу (3.20), получим следующую зависимость H от λ :

$$H = A\lambda^2 - B\lambda^p, \quad (3.22)$$

где A и B — положительные константы. Отсюда сразу видно, что в трехмерной системе гамильтониан при увеличении λ может принимать сколь угодно большие отрицательные значения. В двумерном случае необходимо дополнительно показать, что существуют ситуации, когда разность коэффициентов A и B отрицательна. Для этого достаточно заметить, что коэффициент A зависит от числа волн N линейно, а коэффициент B — квадратично. Поэтому при достаточно больших значениях N разность $A - B$ действительно отрицательна.

Существование систем с отрицательной энергией означает, что среди решений уравнений (2.25), (2.26) имеются решения с захваченными в потенциальную яму высокочастотными волнами. В отсутствие у системы минимума энергии, т. е. в двумерных и трехмерных задачах, законы сохранения допускают самопроизвольное сжатие таких состояний с излучением избыточной энергии в виде звука. Этот процесс, приводящий в конечном счете к диссипации высокочастотной энергии, получил название *коллапса* [9]. Специфика одномерной задачи состоит в том, что здесь сжатие может остановиться до включения диссипативных эффектов.

4. Адиабатическое приближение и приближение геометрической оптики для сверхзвуковых плазмонов

Характер решения системы уравнений (2.25), (2.26) существенно зависит от того, велик или мал входящий в эту систему параметр g , равный удвоенному отношению скорости звука к групповой скорости плазмонов с $k = k_0$. Величина k_0 предпо-

лагается здесь равной обратному пространственному масштабу задачи, определяемому начальными условиями. Чтобы пояснить роль параметра g , рассмотрим одномерную ситуацию, в которой уравнения (2.25), (2.26) принимают вид

$$i g \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = nE; \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2. \quad (4.2)$$

Большие значения g соответствуют здесь медленным (дозвуковым), а малые — быстрым (сверхзвуковым) плазмонам. В первом из этих двух случаев скорости плазмонов столь малы, что возмущения плотности n успевают без запаздывания «следить» за распределением высокочастотного давления. Это позволяет пренебречь в уравнении (4.2) инерцией ионов и, получив, таким образом, соотношение $n = -|E|^2$, свести исходную систему к нелинейному уравнению Шредингера

$$i g \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + |E|^2 E = 0, \quad (4.3)$$

которое, как известно, интегрируется методом обратной задачи рассеяния [20].

Распространить метод обратной задачи на случай малых значений g , отвечающий сверхзвуковым плазмонам, не удастся. Трудности на этом пути связаны с качественным изменением динамики системы при замене дозвуковых плазмонов сверхзвуковыми. Ясно, однако, что наличие малого параметра g облегчает анализ уравнений (4.1), (4.2) и дает надежду если не на полное их исследование, то, по крайней мере, на получение интересных частных результатов.

Упрощения, возникающие при $g \ll 1$, связаны с возможностью воспользоваться квантовомеханической аналогией и перейти в уравнениях (4.1), (4.2) к адиабатическому приближению. Малость g означает, что возмущение плотности, играющее роль потенциальной энергии в уравнении Шредингера (4.1), изменяется медленно в масштабе собственных частот плазмонов, находящихся в этом потенциале. Переходы плазмонов с уровня на уровень в этом случае сильно подавлены. Если полностью пренебречь такими переходами, то решение уравнения (4.1) удобно записать в виде суммы адиабатических собственных функций E_i , удовлетворяющих уравнению

$$g\omega_i E_i + \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = nE_i, \quad (4.4)$$

где $g\omega_i$ — адиабатические собственные значения, зависящие от времени как от параметра. При этом у системы появляются

дополнительные интегралы движения: числа заполнения уровней

$$N_i = \int |E_i|^2 dx. \quad (4.5)$$

В том случае, когда частоты заселенных уровней ω_i не слишком близки друг к другу, пондеромоторная сила в уравнении (4.2) содержит слагаемые, по-разному зависящие от времени: медленные (диагональные) и быстро осциллирующие (интерференционные). В пределе $\Delta\omega_i \gg 1$, когда частоты интерференционных осцилляций велики по сравнению со звуковыми частотами, основную роль в уравнении (4.2) играет медленная часть пондеромоторной силы, что позволяет с хорошей точностью записать уравнение (4.2) в виде

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=1}^{\nu} |E_i|^2. \quad (4.6)$$

Здесь ν — полное число заселенных плазмонами уровней, причем для простоты считается, что полная длина системы L конечна, так что весь спектр собственных значений дискретен. Фактически, однако, используемое приближение можно распространить и на случай непрерывного спектра. Для этого необходимо, чтобы в системе отсутствовало пересечение первоначально далеких друг от друга уровней и чтобы распределение плазмов по уровням было достаточно плавным.

Заметим, что пренебрегая переходами с уровня на уровень, мы, в частности, пренебрегаем спектральной перекачкой плазмов, обусловленной процессом распада ленгмюровских волн на ленгмюровские и ионно-звуковые. Полученная нами упрощенная система уравнений (4.4), (4.6) предназначена для описания более быстрых процессов. К их числу относятся модуляционная неустойчивость, взаимодействие солитонов и другие явления, характерные для плазмы с высоким уровнем ленгмюровских волн.

Примечательно, что переход к адиабатическому приближению оставляет рассматриваемую систему гамильтоновой. При этом из гамильтониана исключаются переменные, отвечающие наиболее «быстрым» степеням свободы, что проявляется в замене динамического уравнения (4.1) кинематическими соотношениями (4.4), (4.5), определяющими заселенности уровней и функциональную зависимость собственных частот ω_i от профиля плотности плазмы. Зная эту зависимость, можно записать «адиабатический» гамильтониан одномерной системы в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2} \int \left[\eta^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] dx + g \sum_{i=1}^{\nu} N_i \omega_i. \quad (4.7)$$

Чтобы получить отсюда уравнение (4.6) для возмущения плотности

$$n = -\partial \xi / \partial x, \quad (4.8)$$

достаточно учесть, что для уравнения Шредингера вариационная производная собственного значения $g\omega_i$ по потенциалу n равна квадрату нормированной на единицу собственной функции [21].

Адиабатическое приближение требует медленности изменения плотности плазмы лишь во времени и не налагает ограничений на пространственный масштаб профиля плотности. Если этот масштаб велик по сравнению с характерными длинами ленгмюровских волн, то задачу можно дополнительно упростить, воспользовавшись приближением геометрической оптики. Ленгмюровские волны в этом приближении описываются как набор квазимонохроматических пакетов с функцией распределения $N(\mathbf{k}; \mathbf{r}; t)$, удовлетворяющей «бесстолкновительному» кинетическому уравнению [22], которое в безразмерных переменных имеет вид

$$g \frac{\partial}{\partial t} N + 2\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} N - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} N = 0. \quad (4.9)$$

Это уравнение эквивалентно системе гамильтоновых уравнений движения частиц

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{H}; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \tilde{H} \quad (4.10)$$

с гамильтонианом $\tilde{H} = (k^2 + n)/g$.

Интеграл от функции $N(\mathbf{k}; \mathbf{r}; t)$ по волновым векторам равен плотности плазмонов. В безразмерных переменных

$$\int N d\mathbf{k} = |\mathbf{E}|^2. \quad (4.11)$$

Подстановка $|\mathbf{E}|^2$ из этого соотношения в уравнение (2.25) дает в дополнение к (4.9) следующее уравнение для возмущения плотности:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n - \Delta n = \Delta \int N d\mathbf{k}. \quad (4.12)$$

Отметим, что приближение геометрической оптики (так же как и адиабатическое приближение) не учитывает корреляции фаз плазмонов. Формальным выражением этого является независимость уравнений (4.9), (4.12) от фаз и описываемое соотношением (4.11) сложение интенсивностей волн с разными волновыми векторами.

В заключение приведем непосредственно следующие из уравнений (4.9), (4.12) уравнения непрерывности, соответствующие сохранению числа плазмонов, импульса и энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int N d\mathbf{k} + \frac{2}{g} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int N k_\alpha d\mathbf{k} = 0; \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[g \int N k_\alpha d\mathbf{k} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} \operatorname{div} \xi \right] = - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\operatorname{div} \xi)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial t} + \int (2k_\alpha k_\beta - \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \xi) N d\mathbf{k} \right]; \quad (4.14) \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int (k^2 - \operatorname{div} \xi) N d\mathbf{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \xi)^2 \right] = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[- \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} \operatorname{div} \xi + \int \left(\frac{2}{g} k_\alpha k^2 - \frac{2}{g} k_\alpha \operatorname{div} \xi + \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} \right) N d\mathbf{k} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь учтено, что $n = -\operatorname{div} \xi$, где вектор ξ удовлетворяет уравнению (3.4).

5. Составные солитоны

В этом параграфе мы, следуя работе [23], покажем, что адиабатические уравнения (4.4) — (4.6) допускают существование локализованных объектов, более сложных, чем обычные солитоны. В рамках упрощенной системы (4.4) — (4.6) эти объекты стационарны. Как приближенные решения исходных уравнений (4.1), (4.2) они примечательны тем, что являются долгоживущими, т. е. сохраняют свою структуру значительно дольше того времени, за которое звук проходит расстояние порядка размера солитона.

Известно, что потенциальная яма, соответствующая обычно солитону, обладает свойством безотражательности. Рассматриваемые ниже составные солитоны также объединены этим свойством, но в отличие от обычного солитона, имеющего лишь один дискретный уровень, они могут иметь сколь угодно много уровней.

Напомним, что безотражательные потенциалы имеют следующий вид (см., например, [24]):

$$U(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln [\det (\hat{I} + \hat{C})], \quad (5.1)$$

где \hat{I} — единичная матрица, а \hat{C} — симметричная матрица с элементами

$$C_{ik} = \frac{c_i c_k}{\kappa_i + \kappa_k} \exp[-(\kappa_i + \kappa_k) x]. \quad (5.2)$$

Положительные константы $\kappa_i > 0$ определяют собственные значения

$$g\omega_i = -\kappa_i^2, \quad (5.3)$$

а константы c_i остаются в нашей задаче свободными параметрами.

Нормированные на единицу собственные функции, соответствующие потенциалу (5.1), определяются системой линейных уравнений

$$\varphi_i(x) + \sum_{k=1}^{\nu} \varphi_k(x) \frac{c_i c_k}{\kappa_i + \kappa_k} \exp[-(\kappa_i + \kappa_k)x] = c_i \exp(-\kappa_i x). \quad (5.4)$$

Весьма примечательно, что потенциал (5.1) складывается из квадратов своих собственных функций ([24], с. 90)

$$U(x) = -4 \sum_{i=1}^{\nu} \kappa_i \varphi_i^2(x). \quad (5.5)$$

Из последнего соотношения сразу следует, что при

$$N_i = 4\kappa_i(1-s^2) \quad (5.6)$$

система (4.4) — (4.6) имеет решения вида

$$n = -\frac{1}{1-s^2} \sum_{i=1}^{\nu} |E_i|^2; \quad (5.7)$$

$$E_i = 2\sqrt{\kappa_i(1-s^2)} \varphi_i(x-st), \quad (5.8)$$

отвечающие равномерному движению потенциальной ямы с произвольной дозвуковой скоростью s . Нетрудно убедиться в том, что при надлежащем выборе констант c_i рассматриваемые решения представляют собой совокупность удаленных друг от друга и взаимно неподвижных обычных солитонов. Однако константы c_i можно выбрать и так, что солитоны, оставаясь в равновесии, потеряют индивидуальность, т. е. волновые функции различных состояний окажутся сильно перекрывающимися. Примечательно, что энергия H и импульс P системы, а также масса $m = \int n dx$ вытесненного из каверн вещества остаются при изменении c_i точно такими же, как у набора неперекрывающихся солитонов с одинаковыми скоростями s . Это делает содержательным термин *составной солитон*. Сохранение массы при изменении c_i следует из формул (5.6), (5.7). Что же касается энергии и импульса, то здесь для доказательства достаточно воспользоваться независимостью от c_i интеграла $\int n^2 dx$ — одного из интегралов движения уравнения KdV (см. [25], с. 48). Обращает на себя внимание тот факт, что потенциал (5.7) по

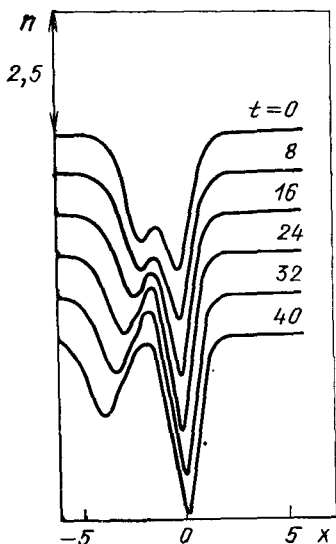


Рис. 1. Эволюция двухуровневого составного солитона

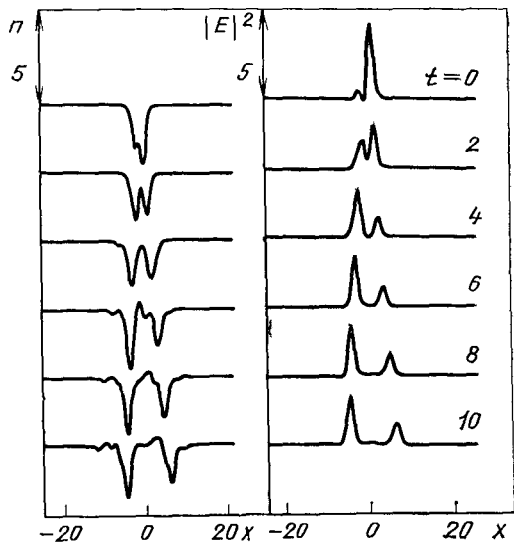


Рис. 2. Распад несогласованного двухуровневого состояния

форме совпадает с многосолитонным решением уравнения KdV , но его зависимость от времени в данном случае иная. Так, в частности, нетрудно проверить, что система (4.4) — (4.6) не имеет решения типа (5.1) в виде свободно проходящих друг через друга солитонов. Это наводит на мысль, что столкновения солитонов, описываемые системой (4.4) — (4.6), обязательно сопровождаются излучением звука. Отметим в этой связи, что решение (5.7), (5.8) реализует минимум гамильтониана системы уравнений (4.4) — (4.6) при заданных значениях импульса P и чисел заполнения уровней N_i .

Чтобы проиллюстрировать «жизнеспособность» составных солитонов, обратимся к рис. 1, 2, на которых представлены результаты численного интегрирования системы (4.1), (4.2) при $g=0,05$ и двух различных начальных условиях. Рисунок 1 отвечает начальному условию в виде двухуровневого составного солитона с $c_1=c_2=1$, $s=0$, $\kappa_1=1$, $\kappa_2=1,5$, а рис. 2 — тому же исходному профилю плотности и не согласованному с ним распределению плазмонов:

$$|E_1|^2 = 4\varphi_1^2(x); \quad |E_2|^2 = 3\varphi_2^2(x) \quad (5.9)$$

(число плазмонов на нижнем уровне в этом случае вдвое меньше равновесного). Для распределения (5.9) газокINETическое давление заметно превышает давление плазмонов, а масса вытесненного из каверны вещества превышает массу, вытесня-

мую парой неподвижных солитонов с $N_1=4$ и $N_2=3$. Сами уровни при этом заселены инверсным образом.

Как видно из рис. 2, несогласованное состояние быстро (за время порядка звукового) разрушается, и, излучая звук, превращается в два расходящихся солитона. Составной же солитон перестраивается безызлучательно и гораздо медленнее. Его эволюцию можно охарактеризовать как плавное изменение параметров c_1 и c_2 при сохраняющихся собственных значениях и числах заполнения. Рисунок 1 свидетельствует о том, что малые поправки, отброшенные при выводе уравнений (4.4) — (4.6), приводят к медленному распаду составного солитона на два обычных. Вычисление соответствующих поправок к гамильтониану системы показывает, что такой распад выгоден энергетически, но его скорость пропорциональна малому параметру g .

6. Автомодельный коллапс ленгмюровских волн

Попытки точно сформулировать необходимые и достаточные условия коллапса и количественно описать его динамику предпринимались с момента появления работы [9], т. е. уже более 15 лет. Большая часть этих попыток связана с использованием адиабатического описания плазмонов. В сочетании с дополнительным упрощающим предположением об автомодельности коллапса это позволило к настоящему времени построить конкретные примеры коллапсирующих решений. Два таких примера приведены в данном параграфе. Они примечательны тем, что коллапсирующая каверна обладает в одном случае цилиндрической, а в другом — сферической симметрией. Пример решения с более низкой симметрией (коллапс сильно сплюснутой каверны) построен в [26].

6.1. Квазиклассическая модель коллапса [27]. При рассмотрении динамики коллапса обычно подразумевается, что длина ленгмюровской волны сопоставима с размером потенциальной ямы, в которой заперты ленгмюровские колебания, а число имеющихся в яме уровней невелико. Эта ситуация весьма сложна для аналитического исследования, поскольку здесь требуется искать точные «волновые функции» плазмонов. Дело обстоит гораздо проще, если яма квазиклассическая (содержит много уровней). Плазмоны в такой яме можно описывать кинетическим уравнением (4.9), а эволюцию самой ямы — уравнением (4.12).

Постановка задачи о коллапсе в рамках системы (4.9), (4.12) представляет интерес по той причине, что качественные соображения, запрещающие одномерный коллапс и указывающие на возможность коллапса в двумерном и трехмерном случаях [28], справедливы и в квазиклассической ситуации. Подчеркнем, что эти соображения не связаны с какими бы то ни

было предположениями относительно фаз ленгмюровских волн и, следовательно, полностью применимы в случае быстрого фазового перемешивания запертых в каверне плазмонов.

Предположим, что распределение плотности плазмы в каверне цилиндрически-симметрично. Ввиду адиабатической медленности эволюции каверны распределение находящихся в ней плазмонов $N(\mathbf{k}; \mathbf{r}; t)$ зависит только от интегралов движения плазмона: момента импульса $M = k_{\varphi} r$ и радиального адиабатического инварианта

$$I = \int (g\tilde{H} - n - M^2/r^2)^{1/2} dr.$$

Здесь \tilde{H} — энергия плазмона [см. (4.10)]. Вид функции $N(M; I)$ определяется начальными условиями.

При надлежащем выборе начального состояния возмущение плотности n эволюционирует по автомодельному закону:

$$n = - \frac{1}{(t_s - t)^2} f(\rho); \quad \rho \equiv \frac{r}{t_s - t}, \quad (6.1)$$

где t_s — момент образования особенности. Такая автомодельность имеется не только в квазиклассической, но и в традиционной задаче о коллапсе (см., например, [29]). Существенно, что при выполнении соотношения (6.1) граница, отделяющая запертые плазмоны от пролетных на плоскости переменных M и I , не зависит от времени. Поэтому можно принять, что функция $N(M; I)$ отлична от нуля только для запертых плазмонов и равна некоторой константе N_0 . Теперь нетрудно вычислить вклад плазмонов в давление

$$\int N d\mathbf{k} = - \pi n N_0$$

и получить из уравнения (4.12) следующее уравнение для $f(\rho)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho^3 f) + (\pi N_0 - 1) \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} f = 0. \quad (6.2)$$

Отсюда

$$f(\rho) = \left(\frac{\rho^2}{\pi N_0 - 1} + 1 \right)^{-3/2}. \quad (6.3)$$

При достаточно высокой интенсивности ленгмюровских волн ($N_0 > 1/\pi$) формулы (6.1), (6.3) описывают коллапс начального распределения, причем легко проверить, что условие квазиклассичности потенциальной ямы и критерий применимости адиабатического приближения автоматически выполняются в течение всего процесса коллапса, если только они выполнены в начальный момент времени.

Рассмотренная квазиклассическая модель хотя и демонстрирует возможность коллапса, но обладает тем недостатком,

что каверна подвержена неустойчивости как относительно модуляции в продольном направлении, так и относительно мелко-масштабной азимутальной модуляции. Физическая причина разрушения каверны состоит в том, что в характерном для коллапса режиме плотность энергии плазмонов существенно превышает порог неустойчивости Ведынова — Рудакова [8]. В этом случае мелкомасштабные по отношению к каверне возмущения плотности с размером в несколько характерных длин волн плазмонов растут быстрее, чем эволюционирует сама каверна [30]. Стремление построить решение, свободное от этого дефекта, заставляет вернуться от квазиклассической модели к ситуации, когда в коллапс вовлечены лишь плазмоны с небольшими квантовыми числами. Устойчивостью относительно мелкомасштабных азимутальных возмущений должна обладать, в частности, рассмотренная в [31] цилиндрически-симметричная яма плотности с вращающимся высокочастотным полем (первая азимутальная мода). Напомним, что коллапсирующее решение с чисто радиальным электрическим полем не может реализоваться вследствие малости высокочастотного давления в приосевой части каверны [32]. Для трехмерной задачи решение с малыми номерами мод в симметричной каверне было построено в [33]. Соответствующие результаты составляют дальнейшее содержание этого параграфа.

6.2. Сферически-симметричный коллапс [33]. В трехмерной задаче о коллапсе давление захваченных плазмонов растет существенно быстрее, чем газокINETическое давление [29]. Это дает возможность пренебречь в уравнении (2.15) слагаемым, содержащим Δn . После перехода к адиабатическому приближению и безразмерным переменным (2.24) система уравнений (2.15), (2.23) принимает следующий вид:

$$\nabla (g\omega_i - n - \Delta) \nabla \varphi_i = 0; \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = \Delta \sum_{i=1}^{\nu} |\nabla \varphi_i|^2; \quad (6.5)$$

$$\int |\nabla \varphi_i|^2 d\mathbf{r} = N_i, \quad (6.6)$$

где φ_i — адиабатически меняющиеся собственные функции электростатического потенциала ($\mathbf{E}_i = -\nabla \varphi_i$).

В сферически-симметричной яме связанные состояния плазмонов нумеруют тройками целых чисел (k, l, m), где $k \geq 1$ — главное квантовое число, $l \geq 0$ — орбитальный момент, а $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ — проекция момента. Собственные частоты ω_i в данном случае зависят от k и l , но не от m . В силу такого $2l+1$ -кратного вырождения возникает, вообще говоря, вопрос о фазовой корреляции плазмонов, относящихся к одному и тому

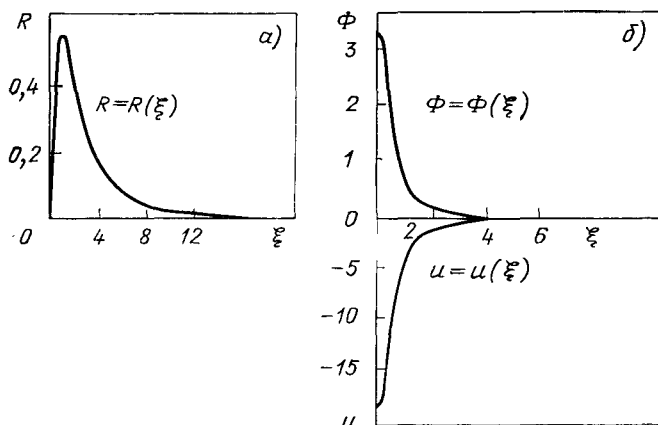


Рис. 3. Решение системы уравнений (6.10), (6.11):

a — радиальная собственная функция дипольного ($l=1$) потенциала высокочастотного поля; *б* — профили давления плазмовов $\Phi(\xi)$ и возмущения плотности плазмы $u(\xi)$

же мультиплету. Однако в адиабатическом пределе уже очень малого возмущения, нарушающего симметрию каверны, достаточно для того, чтобы снять вырождение и тем самым устранить корреляцию фаз, обеспечив применимость уравнений (6.4) — (6.6). Сохранение симметрии сжимающейся ямы обеспечивается при этом равной заселенностью расщепленных уровней.

Уравнения (6.4) — (6.6) допускают автомодельную подстановку:

$$\varphi_{klm} = (t_s - t)^{-1/3} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} R_{kl}(\xi) Y_{lm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right); \quad (6.7)$$

$$n = (t_s - t)^{-4/3} u(\xi); \quad (6.8)$$

$$\omega_{klm} = -(t_s - t)^{-4/3} \Omega_{kl}/g, \quad (6.9)$$

где t_s — момент образования особенности; $\xi \equiv r/(t_s - t)^{2/3}$ — автомодельная радиальная переменная; Ω_{kl} — автомодельная «собственная частота»; $R_{kl}(\xi)$ — радиальные собственные функции, а Y_{lm} — сферические функции. В автомодельных переменных система (6.4) — (6.6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальных собственных функций $R_{kl}(\xi)$ и формы потенциальной ямы $u(\xi)$:

$$\left\{ \left[\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \right]^2 - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 (u + \Omega_{kl}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \frac{l(l+1)}{\xi^2} (u + \Omega_{kl}) \right\} R_{kl}(\xi) = 0; \quad (6.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \xi \Phi; \\ \Phi &\equiv \sum_{kl} \left[\left(\frac{\partial R_{kl}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{l(l \pm 1)}{\xi^2} R_{kl}^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Эта система была проинтегрирована в работе [33] численно в предположении, что заселен лишь один триплет с $l=1$, энергию связи которого Ω_{11} можно без ограничения общности считать равной единице. Результаты интегрирования представлены на рис. 3.

7. Законы сохранения при формировании и взаимодействии солитонов

Как уже упоминалось в § 3, в одномерной задаче энергетически наиболее выгодным состоянием ленгмюровских волн является солитон (3.14), (3.15). Однако при возбуждении ленгмюровской турбулентности внешним источником в однородной плазме рождающиеся плазмоны первоначально свободны. Поэтому возникает естественный вопрос о динамике превращения свободных плазмонов в солитон. В этом параграфе мы выясним, какие ограничения на данный процесс и некоторые другие процессы с участием солитонов налагают законы сохранения в сочетании с условиями адиабатичности.

7.1. Излучение звука при формировании солитона из свободных плазмонов [34]. Нас будут интересовать солитоны достаточно большой амплитуды ($N \gg g$), у которых собственная частота Ω связанных плазмонов существенно превышает частоту звука Ω_s , отвечающую размеру такого солитона [см. (3.14), (3.16)]. Поскольку оценка энергии связанного состояния определяется достаточно грубыми параметрами потенциальной ямы, неравенство $\Omega \gg \Omega_s$ характеризует не только солитон с $N \gg g$, но и любую другую яму сопоставимой глубины и ширины. Если в такой (отличной от солитона) яме имеется N захваченных плазмонов, то яма будет деформироваться с характерным временем порядка Ω^{-1}_s , излучая звук и превращаясь в солитон. При этом в силу адиабатичности плазмоны не могут ни покидать яму, ни захватываться в нее. Чтобы вероятность захвата была заметной, уровень энергии в яме должен лежать гораздо ближе к границе непрерывного спектра, чем в соответствующем солитоне. Иными словами, необходимость нарушения адиабатичности в процессе захвата означает, что по сравнению с солитоном яма в момент захвата мелкая, т. е. захват происходит при очень малой амплитуде возмущения плотности плазмы. Последующее углубление ямы в процессе формирования солитона приводит к тому, что энергия связи и кинетическая энергия

находящихся в ней плазмонов существенно возрастают по сравнению со своими значениями в момент захвата. Ясно также, что при заданном начальном профиле плотности вероятность захвата должна расти с увеличением начальной скорости плазмы v , поскольку увеличение скорости способствует нарушению адiabатичности. Отсюда можно сделать вывод, что в процессе захвата величина $n = -\partial\xi/\partial x$ мала по сравнению с $v = \partial\xi/\partial t$.

Малость возмущения плотности плазмы и кинетической энергии плазмонов в момент захвата позволяет считать полную энергию системы равной исходной энергии звука $\epsilon(0) = (1/2) \int v^2 dx$, а импульс — равным нулю.

Величина $\epsilon(0)$ представляет собой суммарную энергию двух встречных звуковых волн, сфазированных таким образом, что на стадии захвата плазмонов суммарное возмущение плотности мало по сравнению с амплитудой каждой из этих волн. Предполагая, что в конечном состоянии имеется солитон с параметрами N и s и расходящиеся от него звуковые волны с энергиями ϵ_+ и ϵ_- (знаки «+» и «-» указывают направление распространения волны), можно представить законы сохранения в виде

$$H(N; s) + \epsilon_+ + \epsilon_- = \epsilon(0); \quad (7.1)$$

$$P(N; s) + \epsilon_+ - \epsilon_- = 0. \quad (7.2)$$

Ввиду положительности величин ϵ_+ и ϵ_- законы сохранения могут выполняться только в том случае, когда

$$H(N; s) + |P(N; s)| \leq \epsilon(0). \quad (7.3)$$

Для солитонов с $N \gg g$ это ограничение с учетом формул (3.17), (3.18) имеет следующий вид:

$$\frac{N^3}{48} \frac{5s^2 + 4|s| - 1}{(1 - s^2)^3} \leq \epsilon(0). \quad (7.4)$$

Полученное неравенство показывает, что неподвижные и медленно движущиеся солитоны ($|s| < 1/5$) могут рождаться даже при $\epsilon(0) = 0$, т. е. без участия затравочного звука. Что же касается более быстрых солитонов, то для них пороговая энергия звука отлична от нуля, причем по мере увеличения скорости солитона этот порог возрастает.

Кроме энергии и импульса излучаемые звуковые волны уносят также вещество, выдавливаемое из формирующегося солитона. В частном случае рождения солитона без затравочного звука [$n(x; 0) = v(x; 0) = 0$] законы сохранения (3.11), (3.12) дают:

$$m_+ + m_- - N/(1 - s^2) = 0; \quad (7.5)$$

$$m_+ - m_- - sN/(1 - s^2) = 0, \quad (7.6)$$

где $m_{\pm} \equiv \int n_{\pm} dx$ (величины n_{+} и n_{-} представляют собой возмущения плотности в уходящих от солитона звуковых волнах). Отсюда

$$m_{\pm} = N / [2(1 \mp s)]. \quad (7.7)$$

Формула (7.7) и соотношение

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{N^3}{96} \frac{(1 \mp 4 - 5s^2)}{(1 - s^2)^3}, \quad (7.8)$$

следующее при $\varepsilon(0) = 0$ из формул (7.1) и (7.2), показывают, что при $s \neq 0$ звуковые волны, бегущие в направлении движения солитона, уносят меньше энергии и импульса, но больше массы, чем волны, бегущие в противоположную сторону.

7.2. Разрушение солитона звуковыми импульсами. Под разрушением солитона будем понимать высвобождение находящихся в нем плазмонов. Специфика адиабатической задачи заключается в том, что уходящие плазмоны обладают пренебрежимо малыми значениями энергии и импульса, поскольку их излучение происходит в момент слияния дискретного уровня с непрерывным спектром, нижняя граница которого соответствует нулевой энергии. Это позволяет записать законы сохранения для рассматриваемого процесса в следующем виде:

$$\varepsilon_{+}(0) + \varepsilon_{-}(0) + H = \varepsilon_{+}(\infty) + \varepsilon_{-}(\infty); \quad (7.9)$$

$$\varepsilon_{+}(0) - \varepsilon_{-}(0) + P = \varepsilon_{+}(\infty) - \varepsilon_{-}(\infty), \quad (7.10)$$

где аргументы 0 и ∞ энергий звуковых волн отвечают начальному и конечному состояниям. С учетом выражений (3.17), (3.18) для H и P при $N \gg g$ формулы (7.9), (7.10) дают

$$\varepsilon_{\pm}(\infty) = \varepsilon_{\pm}(0) + \frac{N^3}{96} \frac{(5s^2 \pm 4s - 1)}{(1 - s^2)^3}.$$

Поскольку энергии ε_{+} и ε_{-} положительны, интересующий нас процесс возможен только в том случае, когда для обоих знаков («+» и «-») имеет место неравенство

$$\varepsilon_{\pm}(0) + \frac{N^3}{96} \frac{(5s^2 \pm 4s - 1)}{(1 - s^2)^3} \geq 0. \quad (7.11)$$

Отсюда, в частности, следует, что неподвижный или достаточно медленный ($|s| < 1/5$) солитон нельзя разрушить звуковым импульсом (пусть даже очень сильным), набегающим с какой-либо одной стороны. У такого импульса отлична от нуля лишь одна из величин $\varepsilon_{\pm}(0)$, что делает невыполнимым условие (7.11), поскольку при $|s| < 1/5$ второе слагаемое в левой части (7.11) отрицательно. Вместе с тем законы сохранения допускают разрушение солитона двумя встречными импульсами, если только последние не слишком малы.

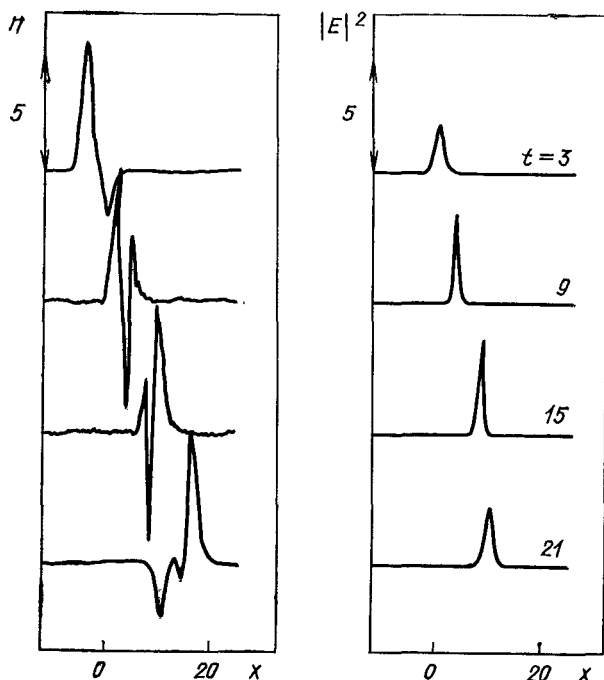


Рис. 4. Столкновение неподвижного солитона с бегущим звуковым импульсом

Эффект «живучести» солитона при столкновениях с одиночным звуковым импульсом был обнаружен в численных расчетах [35] уже довольно давно, однако оставался без объяснения (возможно, потому что расчеты [35] велись фактически при $g \sim 1$). Чтобы проиллюстрировать критерий (7.11) в более адекватных условиях, в [23] были выполнены расчеты при $g = 0,05$. Их результаты представлены на рис. 4 и 5 (на рис. 4 — взаимодействие солитона с одиночным импульсом, а на рис. 5 — разрушение солитона двумя встречными импульсами меньшей амплитуды).

Подчеркнем, что будучи необходимым, неравенство (7.11) отнюдь не является достаточным условием разрушения солитона звуком. Последнее видно, например, из решения задачи о взаимодействии солитона с плавными звуковыми возмущениями [36, 37]. Вместе с тем при оптимально выбранном профиле возмущения энергетический порог разрушения вплотную подходит к границе (7.11) [23].

7.3. Столкновения солитонов. В адиабатическом пределе результатом столкновения двух солитонов может быть лишь изменение их скоростей, сопровождаемое излучением звука. За-

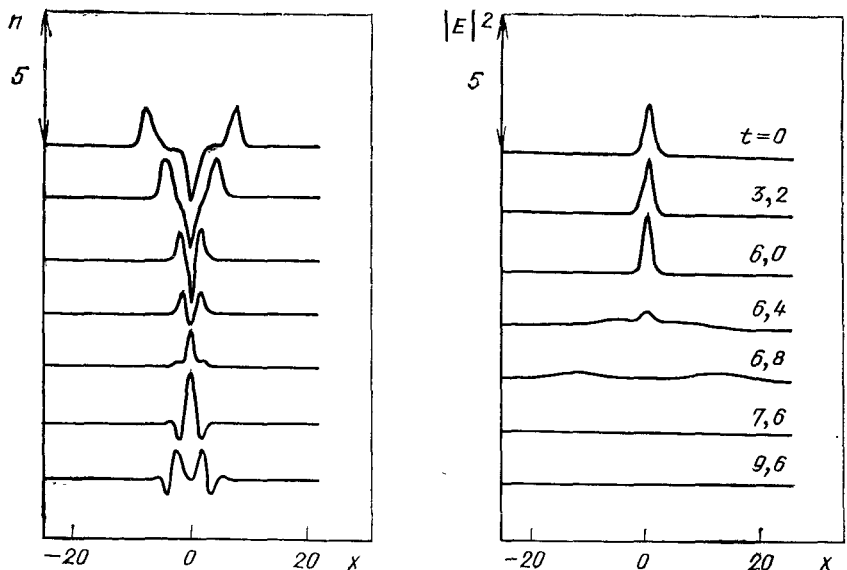


Рис. 5. Вытеснение плазмонов из солитона

селенности солитонных уровней N_1 и N_2 в этом процессе сохраняются. Изменение заселенностей уровней возможно только при нарушении адиабатичности. В принципе мыслимы два варианта такого нарушения: вытеснение верхнего уровня в сплошной спектр (т. е. разрушение солитона солитоном) и обмен плазмонами при сближении двух уровней. Хотя первый процесс и не противоречит законам сохранения энергии и импульса, в численных расчетах он не наблюдался. Причина здесь, видимо, в том, что законы сохранения числа и потока частиц (3.11), (3.12) не позволяют системе выйти при $t \rightarrow \infty$ на состояние с одним лишь дискретным уровнем. Действительно, при высвобождении плазмонов с верхнего уровня условия (3.11), (3.12) дают

$$-\frac{N_1}{1-s_1^2} - \frac{N_2}{1-s_2^2} = -\frac{N}{1-s^2} + m_+ + m_-; \quad (7.12)$$

$$-\frac{s_1 N_1}{1-s_1^2} - \frac{s_2 N_2}{1-s_2^2} = -\frac{sN}{1-s^2} + m_+ - m_-, \quad (7.13)$$

где

$$N = \begin{cases} N_1 & \text{при } N_1 > N_2 \frac{1-s_1^2}{1-s_2^2}; \\ N_2 & \text{при } N_2 > N_1 \frac{1-s_2^2}{1-s_1^2}. \end{cases} \quad (7.14)$$

Используя эти соотношения, нетрудно проверить, что хотя бы одна из величин m_+ и m_- отрицательна, т. е. по крайней мере одна из разлетающихся звуковых волн представляет собой потенциальную яму, способную удерживать плазмоны.

Перейдем теперь к случаю резонансного столкновения солитонов, в котором из-за близости собственных частот Ω_1 и Ω_2 возможно изменение чисел заполнения N_1 и N_2 вплоть до перехода всех плазмонов в один солитон. Наличие резонанса $\Omega_1 \approx \Omega_2$ означает, что сталкивающимся солитонам отвечают одинаковые потенциальные ямы и что

$$N_1/(1-s_1^2) \approx N_2/(1-s_2^2). \quad (7.15)$$

Ширина этого резонанса пропорциональна малому параметру g . Можно показать [34], что при выполнении условия (7.15) законы сохранения действительно разрешают слияние двух солитонов в энергетически более выгодный солитон с суммарным числом плазмонов $N=N_1+N_2$. Однако однозначно предсказать результат столкновения по известным значениям N_1 , s_1 , N_2 и s_2 не удастся, поскольку он существенно зависит от разности фаз электрического поля в исходных солитонах.

Для слияния двух солитонов наиболее благоприятен случай, когда исходная волновая функция в симметричном потенциале сближающихся солитонов четная (у таких солитонов $N_1=N_2$ и $s_1=-s_2$). В этом случае все плазмоны с самого начала находятся на нижнем уровне, который может адиабатически перейти в уровень, отвечающий одному солитону (рис. 6). Что же касается состояния с нечетной волновой функцией и соответственно более высокой энергией, то при слиянии солитонов оно, оставаясь незаполненным, вытесняется в непрерывный спектр. Заметим, что описанный здесь процесс происходит вообще без изменения заселенностей уровней, т. е. наиболее легким в адиабатической ситуации способом. Если же фазы солитонов различаются на π , т. е. волновая функция нечетна, то плазмоны, находясь в симметричной яме, не могут перейти в основное (четное) состояние и, следовательно, слияние солитонов запрещено (рис. 7).

Примечательно, что вследствие узости резонанса (7.15) переход плазмонов с уровня на уровень возможен лишь при малом перекрытии солитонных потенциальных ям, так как сильное их перекрытие привело бы к расталкиванию уровней. Тот факт, что для солитонов достаточно большой амплитуды слияние разрешено лишь в весьма узком диапазоне параметров, был отмечен еще в [38], где предпринималась попытка аналитически рассчитать излучение звука сталкивающимися солитонами, однако из-за необоснованного использования теории возмущений этот расчет был выполнен некорректно [14]. Малость перекрытия солитонов в момент обмена плазмонами дает принципиаль-

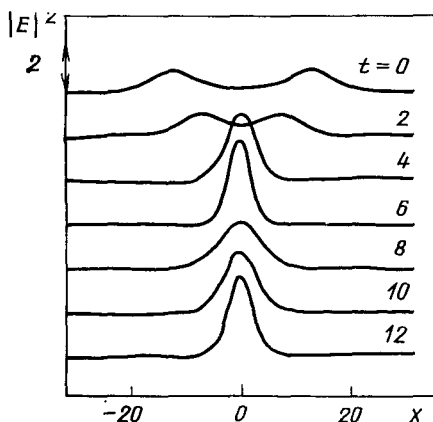


Рис. 6. Адиабатическое слияние солитонов при четном распределении поля $E(x)$

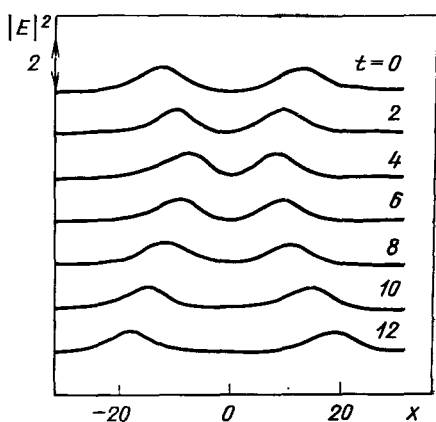


Рис. 7. Столкновение солитонов при нечетном распределении поля $E(x)$

ную возможность провести расчет слияния солитонов более аккуратно.

В заключение отметим, что рассмотренные в этом параграфе эффекты отнюдь не исчерпывают всех возможных процессов с участием солитонов. Мы выделили здесь лишь те примеры, которые наиболее отчетливо показывают роль адиабатичности. Обсуждение других процессов можно найти в обзорах [13, 14].

8. Образование солитона из сгустка ленгмюровских волн

8.1. Постановка задачи. Вернемся к вопросу о захвате свободных плазмонов в солитон и рассмотрим ситуацию, когда начальные возмущения плотности и скорости ионов отсутствуют, а исходное распределение плазмонов представляет собой отдельный сгусток, ширина которого λ удовлетворяет условию

$$r_D \ll \lambda \ll r_D (M/m)^{1/2}, \quad (8.1)$$

означающему, что плазмоны в большинстве своем сверхзвуковые. Здесь и в дальнейших оценках для простоты подразумевается, что у сгустка нет дополнительного внутреннего масштаба, т. е. характерная длина волны плазмонов оценочно равна λ . Тогда в безразмерных переменных (2.24) с $k_0 \sim \lambda^{-1}$ условие (8.1) сводится к неравенству $g \ll 1$.

В процессе разлета плазмонов пондеромоторная сила, возмущающая плотность плазмы, создает потенциальную яму, в результате чего некоторая часть исходного сгустка переходит в связанное состояние. Благодаря высокой скорости разлета возмущение плотности оказывается относительно малым, что, как

отмечено в [39], позволяет описать обратное воздействие этого возмущения на плазмоны в терминах квантовомеханической задачи о частице в мелкой потенциальной яме [21]. Приближение мелкой ямы адекватно рассматриваемой задаче еще и потому, что в силу адиабатических ограничений, обсуждавшихся в § 7, захват плазмонов в яму идет лишь до тех пор, пока уровень энергии, отвечающий связанному состоянию, очень близок к границе непрерывного спектра. По мере углубления ямы этот уровень постепенно опускается и захват в конце концов прекращается, так как зависимость параметров ямы от времени становится адиабатически медленной. Отметим, что в этот момент яма еще может оставаться мелкой.

Захватываемые в яму плазмоны составляют, как мы увидим, лишь малую часть исходного сгустка, тогда как в создании ямы участвует весь сгусток. Это дает возможность разделить решение задачи о захвате на две части: описание ямы, создаваемой свободно разлетающимся сгустком (п. 8.2) и определение числа плазмонов, захватываемых в яму, изменяющуюся по известному закону (п. 8.3).

По окончании захвата яма в течение некоторого времени продолжает углубляться по инерции, а затем постепенно перестраивается под влиянием захваченных плазмонов, излучая звук и превращаясь в солитон. На этой стадии процесса, протекающей адиабатически, число плазмонов в яме сохраняется. Сохранение числа плазмонов, а также энергии и импульса позволяет найти амплитуду образующегося солитона и энергию излучаемого звука (п. 8.4).

8.2. Возникновение потенциальной ямы при разлете сгустка. Используемое ниже приближение мелкой ямы предполагает, что амплитуда n и пространственный масштаб l возмущения плотности удовлетворяют неравенству

$$nl^2 \ll 1. \quad (8.2)$$

При $g \ll 1$ это требование легко выполнимо. Действительно, согласно уравнению (4.1) время разлета сгустка с начальной шириной порядка единицы можно оценить как g , а скорость роста создаваемого этим сгустком возмущения плотности оценочно равна [см. (4.2)]

$$\partial n / \partial t \sim g |A|^2,$$

где A — амплитуда электрического поля в сгустке. Пространственный масштаб этого возмущения равен начальному размеру сгустка, т. е. в неравенстве (8.2) следует положить $l=1$.

После разлета сгустка возмущение плотности продолжает по инерции линейно расти со временем, но не далее чем до $t \sim 1$, поскольку к этому моменту становится существенным звуковой разлет возмущения. Таким образом, возмущение во всяком слу-

чае ограничено сверху величиной $n \sim g|A|^2$. Из этой предварительной оценки видно, что применительно к плотности энергии плазмонов ограничение (8.2) весьма мягкое.

Неравенство (8.2) означает, что характерные длины волн захватываемых в яму плазмонов велики по сравнению с размерами самой ямы. По отношению к таким плазмонам яму можно считать точечной, что соответствует переходу от уравнения (4.1) к уравнению с δ -функциональным потенциалом

$$i g \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = -\eta \delta(x) E. \quad (8.3)$$

Коэффициент η при δ -функции должен обеспечивать тот же перепад производной электрического поля по x , что и на реальной яме. В первом порядке по параметру nl^2 теория возмущений дает

$$\eta = - \int_{-\infty}^{\infty} n dx,$$

но эта величина в силу сохранения числа ионов равна нулю. В следующем (втором) порядке

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-\infty}^x n(x') dx' \right]^2. \quad (8.4)$$

Входящая сюда функция

$$\xi = - \int_{-\infty}^x n(x'; t) dx'$$

удовлетворяет одномерному уравнению (3.4):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi = - \frac{\partial}{\partial x} |E|^2. \quad (8.5)$$

В интересующей нас задаче начальные значения ξ и $\partial \xi / \partial t$ равны нулю. Соответствующее решение уравнения (8.5) имеет вид

$$\xi(x; t) = \frac{1}{2} \int_0^t [|E(x-t+\tau; \tau)|^2 - |E(x+t-\tau; \tau)|^2] d\tau. \quad (8.6)$$

Считая разлет плазмонов, создающих яму, свободным, мы положим

$$|E(x; t)|^2 = \int \bar{E}_{k_1} \bar{E}_{k_2}^* \exp [i(k_1 - k_2)x - it(k_1^2 - k_2^2)] / g dk_1 dk_2, \quad (8.7)$$

где \bar{E}_k — фурье-компоненты исходного поля. В интеграле (8.7) удобно ввести вместо k_1 и k_2 новые переменные $q = k_1 - k_2$ и

$p = (k_1 + k_2)/g$. Выполнив затем в формуле (8.6) интегрирование по времени, можно представить $\xi(x; t)$ в виде

$$\xi = i \frac{g}{2} \int dp dq \frac{\exp(iqx)}{q(1-p^2)} [\cos(qt) - \cos(pqt)] G_+(gp; q) + \\ + \frac{g}{2} \int dp dq \frac{\exp(iqx)}{q(1-p^2)} [p \sin(qt) - \sin(pqt)] G_-(gp; q), \quad (8.8)$$

где G_+ и G_- — четная и нечетная по p части функции $G(gp; q) \equiv \bar{E}_{(gp+q)/2} \bar{E}_{(gp-q)/2}^*$.

Малость параметра g и тот факт, что характерные масштабы изменения функции G по p и q равны соответственно $1/g$ и 1 , позволяют при $t \gg g$ заменить в формуле (8.8) функцию $G_+(gp; q)$ на $G_+(0; q)$. С функцией G_- так поступить не удастся, поскольку остающийся интеграл по p расходится при $p \rightarrow \pm \infty$. Значение интеграла, содержащего G_- , определяется, следовательно, большими значениями p , что дает возможность опустить в подынтегральной функции величину $\sin(pqt)$, а также пренебречь в знаменателе единицей по сравнению с p^2 . В итоге $\xi(x; t)$ приобретает следующий вид:

$$\xi = - \frac{g}{2} \int dq \frac{\sin(qt)}{q} \exp(iqx) R(q), \quad (8.9)$$

где

$$R(q) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dp}{p - i q \epsilon^2} \bar{E}_{(p+q)/2} \bar{E}_{(p-q)/2}^*. \quad (8.10)$$

Эта формула для ξ справедлива во всей области изменения t , за исключением очень малых времен, сопоставимых со временем удвоения ширины исходного сгустка плазмонов. Поскольку при не слишком высокой энергии сгустка столь малые времена в задаче о захвате плазмонов несущественны, формула (8.9) применительно к этой задаче может рассматриваться как точная. Подставив теперь $\xi(x; t)$ в формулу (8.4), получим

$$\eta = \frac{\pi}{2} g^2 \int dq \frac{\sin^2(qt)}{q^2} |R(q)|^2. \quad (8.11)$$

Выпишем также приближенные выражения для η при $t \ll 1$ и $t \gg 1$:

$$\eta = (\pi/2) g^2 t^2 \int |R(q)|^2 dq, \quad t \ll 1; \quad (8.12)$$

$$\eta = (\pi^2/2) g^2 t |R(0)|^2; \quad t \gg 1. \quad (8.13)$$

Множитель $|R(0)|^2$ в формуле (8.13) следует понимать как значение $|R(q)|^2$ при $|q| \sim 1/t \ll 1$. Хотя сама функция $R(q)$, вообще говоря, испытывает скачок при смене знака q [см. фор-

мулу (8.10)], ее модуль при условии гладкости \bar{E} изменяется непрерывно, что и позволяет ввести величину $|R(0)|^2$.

Характер зависимости η от t при $t \ll 1$ объясняется тем, что ионы, испытав короткий толчок со стороны плазмонов, вначале движутся по инерции, и возмущение их плотности растет пропорционально времени. Коэффициент η , будучи квадратичным по n , изменяется при этом как t^2 . С началом звукового разлета ямы квадратичный рост η сменяется линейным. Граница линейного роста со стороны больших значений t определяется нарушением приближения мелкой ямы [39].

8.3. Захват плазмонов. Число захваченных плазмонов $N = |A_0|^2$ определяется амплитудой A_0 связанного состояния в разложении электрического поля по собственным функциям уравнения (8.3), отвечающим мгновенному значению η :

$$E(x; t) = A_0 (\eta/2)^{1/2} \exp(-|x\eta/2|) + \int a_k(t) \psi_k(x; t) dk. \quad (8.14)$$

Здесь a_k — амплитуды состояний непрерывного спектра, характеризующиеся волновыми функциями ψ_k .

После разлета исходного сгустка амплитуда A_0 с точностью до множителя $(2/\eta)^{1/2}$ совпадает со значением электрического поля при $x=0$, поскольку все свободные плазмоны в конце концов покидают область локализации ямы. Таким образом, задача сводится к отысканию асимптотики функции $E(0; t)$ при больших значениях t .

Согласно (8.3) коэффициенты разложения функции $E(x; t)$ в интеграл Фурье по x удовлетворяют уравнению

$$i g \frac{\partial}{\partial t} E_k - k^2 E_k = - \frac{\eta}{2\pi} \varepsilon, \quad (8.15)$$

где $\varepsilon \equiv E(0; t)$. Отсюда

$$E_k(t) = \bar{E}_k \exp(-i k^2 t/g) + \frac{i}{2\pi g} \int_0^t \eta(\tau) \varepsilon(\tau) \exp[i k^2 (\tau - t)/g] d\tau, \quad (8.16)$$

где \bar{E}_k — начальные значения коэффициентов Фурье. Функция $E_k(t)$ связана с $\varepsilon(t)$ соотношением $\varepsilon = \int E_k dk$. Поэтому интегрирование обеих частей формулы (8.16) по k дает для $\varepsilon(t)$ следующее интегральное уравнение:

$$\varepsilon(t) - \frac{1+i}{2(2\pi g)^{1/2}} \int_0^t \frac{\eta(\tau) \varepsilon(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = \int \bar{E}_k \exp(-i k^2 t/g) dk. \quad (8.17)$$

В силу линейности уравнения (8.17) его решение может быть записано в виде $\varepsilon(t) = \int \bar{E}_k \varepsilon_k dk$,

где функция ε_k удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon_k - \frac{1+i}{2(2\pi g)^{1/2}} \int_0^t \frac{\eta(\tau)\varepsilon_k(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = \exp(-ik^2t/g). \quad (8.18)$$

При этом на адиабатической стадии, где N не зависит от времени,

$$N = \frac{2}{\eta} \left| \int \bar{E}_k \varepsilon_k dk \right|^2. \quad (8.19)$$

При степенном законе изменения глубины ямы $\eta = Q^{1/m}$ уравнение (8.18) путем естественных замен

$$\begin{aligned} t &\rightarrow (g/Q^2)^{1/(2m+1)}\tau; \\ k &\rightarrow (g^m Q)^{1/(2m+1)}\kappa \end{aligned}$$

приводится к универсальному виду:

$$\varepsilon_\kappa(\tau) - \frac{1+i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_0^\tau \frac{\tau_1^m \varepsilon_\kappa(\tau_1)}{(\tau-\tau_1)^{1/2}} d\tau_1 = \exp(-i\kappa^2\tau). \quad (8.20)$$

Наличие такой универсальности позволяет сразу найти зависимость величины N , определяемой формулой (8.19), от параметров Q и g . Приняв во внимание, что при $g \ll 1$ в яму захватываются преимущественно длинноволновые плазмоны, и заменив в формуле (8.19) функцию \bar{E}_k ее значением при $k=0$, получим

$$N = |\bar{E}_0|^2 (g^m Q)^{1/(2m+1)} C_m, \quad (8.21)$$

где

$$C_m = 2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-m} \left| \int \varepsilon_\kappa(\tau) d\kappa \right|^2. \quad (8.22)$$

Формула (8.21) задает искомую зависимость N от Q и g с точностью до численного множителя C_m , определяемого асимптотикой решения уравнения (8.20). Для $m=1$ и $m=2$ (а именно эти два случая представляют для нас интерес) множитель C_m удается найти аналитически. Результат соответствующих вычислений (сами вычисления изложены в приложении 1) имеет вид

$$C_2 = \frac{8\pi^4 (4/125)^{1/5}}{\Gamma^2(1/5)\Gamma^2(3/5)}; \quad (8.23)$$

$$C_1 = \pi 6^{1/3} \Gamma^2(2/3), \quad (8.24)$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Объединив формулы (8.12), (8.13) и (8.21) — (8.24), получим окончательно, что

$$N = \frac{8\pi^4 (2\pi/125)^{1/5}}{\Gamma^2(1/5)\Gamma^2(3/5)} g^{4/5} |\bar{E}_0|^2 \left(\int |R(q)|^2 dq \right)^{1/5} \quad (8.25)$$

в случае квадратичного роста ямы, описываемого формулой (8.12), и

$$N = 3^{1/3} \pi^{5/3} \Gamma^2(2/3) g |\bar{E}_0|^2 |R(0)|^{2/3} \quad (8.26)$$

в случае линейного роста (8.13).

8.4. Динамика формирования солитона. Чтобы уточнить область применимости результатов, изложенных в § 8.2 и 8.3, рассмотрим на уровне оценок сценарий формирования солитона в том случае, когда захват плазмонов происходит на стадии инерционного углубления потенциальной ямы ($t \leq 1$), т. е. число захватываемых в солитон волн определяется формулой (8.25). Действуя сходным образом, можно проанализировать и второй режим захвата (это сделано в [39]).

Длительность t_N процесса захвата задается соотношением неопределенности

$$\Omega t_N \sim 1, \quad (8.27)$$

где $\Omega \sim (1/g) \eta^2(t_N)$ — собственная частота связанного состояния в момент t_N . Приняв во внимание, что согласно формуле (8.12)

$$\eta \sim g^2 N_0^2 t^2, \quad (8.28)$$

где N_0 — число плазмонов в исходном сгустке, получим

$$t_N \sim g^{-3/5} N_0^{-4/5}. \quad (8.29)$$

Чтобы захват успел произойти до окончания инерционной стадии ($t_N \leq 1$), должно выполняться условие

$$N_0 > g^{-3/4}. \quad (8.30)$$

Вместе с тем мы предполагали, что в момент захвата яма остается мелкой, т. е. ее размер, равный в безразмерных переменных единице, мал по сравнению с областью локализации связанного состояния $\eta^{-1}(t_N)$. Это дает ограничение на N_0 сверху:

$$N_0 < g^{-2}. \quad (8.31)$$

Последнее неравенство обеспечивает также малость числа захватываемых в яму плазмонов по сравнению с N_0 . Отметим, что вследствие малости параметра g имеется широкий диапазон значений N_0 , в котором неравенства (8.30) и (8.31) могут выполняться одновременно.

Оценим теперь влияние захваченных плазмонов на форму ямы. Из уравнения (4.2) следует, что в момент захвата дополнительное возмущение плотности, создаваемое этими плазмонами, оценочно равно

$$\delta n \sim N \eta^3(t_N) t_N^2. \quad (8.32)$$

Используя выражение (8.25) для N и оценку (8.29), нетрудно проверить, что при выполнении неравенства (8.31) имеет место соотношение

$$\delta n \ll \eta^2, \quad (8.33)$$

показывающее, что в момент захвата поправка к энергии связанного состояния за счет продавливания ямы захваченными плазмонами пренебрежимо мала. Иными словами, захватив плазмоны, яма в течение некоторого времени продолжает углубляться по инерции. При этом захваченные плазмоны адиабатически сжимаются и их давление возрастает. Соответственно возрастает и деформация ямы δl . Время t_D , начиная с которого деформация становится существенной, определяется моментом нарушения неравенства (8.33) и равно (см. [39])

$$t_D \sim g^{-14/20} N_0^{-17/20}. \quad (8.34)$$

При $t \sim t_D$ начинается сверхзвуковое сжатие ямы под влиянием находящихся в ней плазмонов. Динамика сжатия описывается автомодельным законом (см., например, [42])

$$|E|^2 \propto (t_s - t)^{-2}; \quad \delta n \propto (t_s - t)^{-4}. \quad (8.35)$$

В ходе этого сжатия газокинетическое давление растет быстрее, чем давление плазмонов, вследствие чего сжатие в конце концов прекращается, яма превращается в солитон, а вытесненное из нее вещество уносится уходящими звуковыми волнами.

Параметры образующегося солитона должны удовлетворять законам сохранения числа плазмонов, энергии и импульса системы после захвата. Эти законы сохранения сводятся к соотношениям (7.1), (7.2), в которых следует положить $\epsilon(0) = 0$, так как энергия, выделяющаяся при формировании солитона, существенно превышает энергию звуковых возмущений в момент захвата. Из положительности входящих в (7.1) и (7.2) величин ϵ_+ и ϵ_- следует, что скорость солитона s ограничена сверху неравенством

$$|s| \leq 1/5. \quad (8.36)$$

Численная малость этой скорости позволяет с высокой точностью найти амплитуду электрического поля в солитоне $E_* = N/\sqrt{8}$, ширину солитона $\Delta = 4/N$ и суммарную энергию излучаемых звуковых волн $\epsilon_+ + \epsilon_- = N^3/48$. Значение N в этих формулах определяется в рассматриваемом случае формулой (8.25).

Описанная последовательность превращения сгустка плазмонов в солитон показана на рис. 8, 9, представляющих результаты численного решения системы (4.1), (4.2) с $g = 1/8$. Начальные значения n и \dot{n} в этом расчете полагались равными нулю, а начальное распределение электрического поля считалось гауссовым:

$$E(x; 0) = A \exp(-x^2) \quad (8.37)$$

с $A = 5$.

Чтобы продемонстрировать первоначальный разлет плазмонов, последовательность значений времени на рис. 8 сгущена к

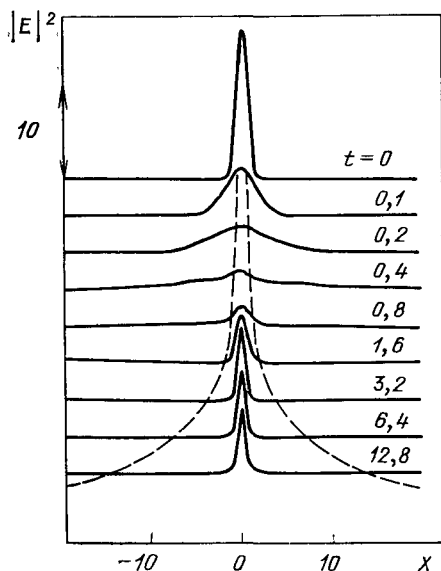


Рис. 8. Разлет и стягивание в солитон плазмонов с гауссовым начальным распределением. Штриховыми линиями показаны траектории, соответствующие движению со скоростью звука

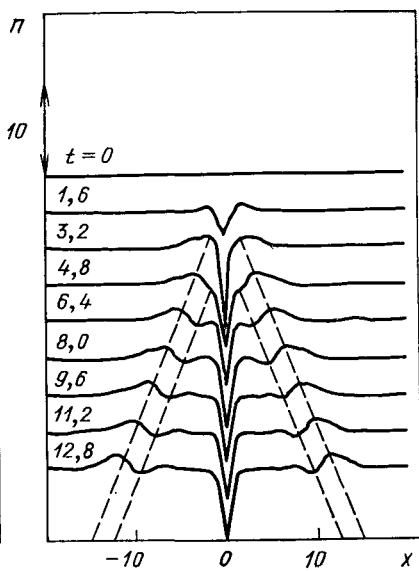


Рис. 9. Эволюция профиля плотности при образовании солитона. Штриховыми линиями выделены расходящиеся звуковые волны

началу, тогда как на рис. 9 выбран постоянный временной шаг. Из рис. 8 видно, что после разлета свободных плазмонов оставшаяся часть сгустка сжимается, принимая в конечном счете форму солитона. На рис. 9 отчетливо прослеживается уход от солитона звуковых волн.

В ходе расчетов была найдена также зависимость числа плазмонов в солитоне от числа плазмонов в начальном сгустке $N_0 \equiv (\pi/2)^{1/2} A^2$. При изменении амплитуды A от 2,5 до 7,5 эта зависимость совпадает с аналитическим результатом (8.25) с точностью не хуже 20% [39]. Такое согласие вполне удовлетворительно, так как при $A=7,5$ в солитон захватывается уже довольно большая (около 40%) часть энергии исходного сгустка, т. е. сравнение ведется фактически на пределе применимости теории.

Вернемся еще раз к моменту захвата плазмонов в мелкую яму. Тот факт, что пространственный масштаб волновой функции плазмона в такой яме существенно превышает размер исходного сгустка, позволяет сделать интересный вывод [23]: два неперекрывающихся, но находящихся не слишком далеко друг от друга сгустка могут образовать общий солитон, положение которого не совпадает с положением ни одного из сгустков.

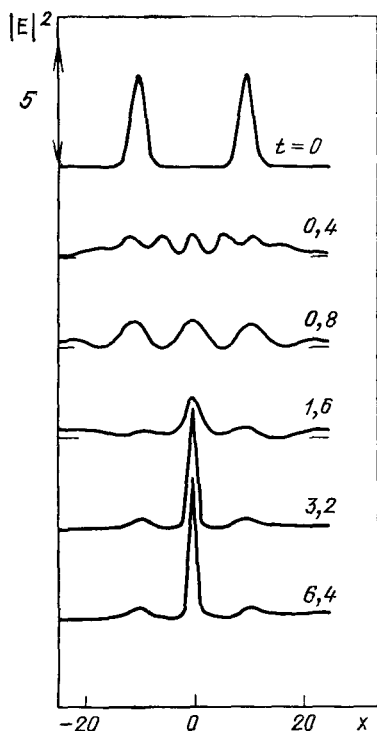


Рис. 10. Образование общего солитона из ленгмюровских сгустков с четным распределением поля $E(x)$

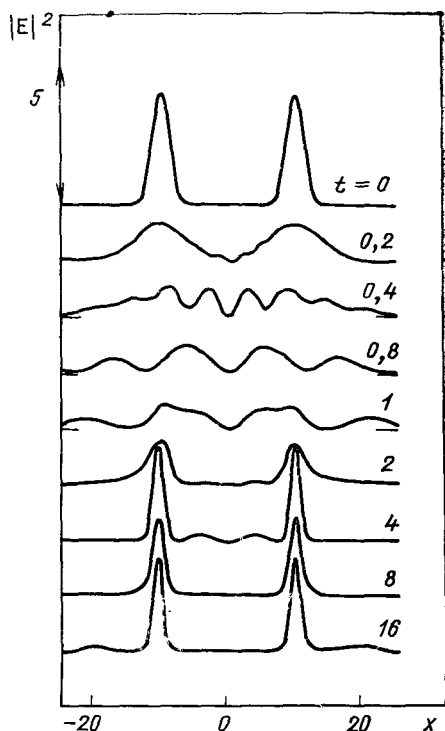


Рис. 11. Образование солитонов из сгустков с нечетным распределением поля $E(x)$

Слова «не слишком далеко» подразумевают, что расстояние между рассматриваемыми сгустками меньше или порядка длины волны плазмонов, захватываемых в мелкую яму.

Чтобы проиллюстрировать особенности формирования солитона из двух сгустков, обратимся к рис. 10, 11. Рисунок 10 показывает, что солитон действительно может возникать в промежутке между сгустками. Рисунок 11 требует дополнительных пояснений. Начальное распределение интенсивности волн здесь то же, что и на рис. 10, но рис. 10 соответствует четному, а рис. 11 — нечетному начальному распределению электрического поля. В приближении мелкой ямы волновая функция связанного состояния является четной. При нечетном начальном условии захват плазмонов в такую яму запрещен; он становится возможным только после появления в потенциале $n(x)$ второго уровня. Плазмоны, захватываемые на этот уровень, не могут

сформировать один солитон, так как в солитоне волновая функция должна быть четной. В итоге возникают два одинаковых по амплитуде солитона с противоположными знаками высокочастотного электрического поля.

Отметим, что на рис. 10 наряду с центральным солитоном видны также боковые солитоны относительно малой амплитуды. Их появление обусловлено захватом некоторой части плазмонов в каверны, остающиеся на месте локализации затравочных сгустков после стягивания плазмонов в центральный солитон. При увеличении расстояния между сгустками доля плазмонов, захватываемых в боковые солитоны, возрастает и картина, представленная на рис. 10, постепенно переходит в картину рождения солитонов каждым из сгустков в отдельности.

9. Модуляционная неустойчивость (линейная теория)

Задачи, представленные в § 5—8, объединены тем, что все они посвящены динамике пространственно локализованных и притом не слишком протяженных волновых пакетов. Для постановки вопроса о турбулентности характерна несколько иная ситуация. Здесь приходится иметь дело с неограниченной системой, в которой задана не полная энергия волн, а средняя плотность их энергии. Простейшими из имеющихся здесь задач являются рассматриваемые ниже задачи об устойчивости отдельной монохроматической волны и набора ленгмюровских волн со случайными фазами. Термин «модуляционная» в названии этого параграфа означает, что нас будет интересовать неустойчивость, адиабатическая по отношению к высокочастотным волнам, т. е. не связанная с резонансными процессами типа трехволнового распада или индуцированного рассеяния, приводящими к изменению чисел заполнения N_i вследствие спектральной перекачки плазмонов. Такое понимание термина «модуляционная» несколько шире общепринятого, поскольку мы не предполагаем, что длина волны возмущения велика по сравнению с характерными длинами высокочастотных волн. Ориентация на неустойчивости адиабатического типа мотивирована тем, что в случае достаточно широкого спектра ленгмюровских волн именно эти неустойчивости определяют картину перехода от слабой турбулентности к сильной.

9.1. Неустойчивость монохроматической ленгмюровской волны. Система уравнений (2.15), (2.21) имеет точное решение, в котором плотность плазмы однородна ($n=0$), а электрическое поле представляет собой бегущую ленгмюровскую волну конечной амплитуды

$$E = (k/k) E_0 \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r} - i \Omega_{\mathbf{k}}^l t); \quad \Omega_{\mathbf{k}}^l = (3/2) \omega_p k^2 r_D^2. \quad (9.1)$$

Добавив к этому решению возмущение плотности вида

$$n \propto \cos(\mathbf{q}\mathbf{r} - \Omega t) \quad (9.2)$$

и линеаризовав исходную систему, получим для Ω и \mathbf{q} следующее дисперсионное соотношение:

$$\Omega^2 - q^2 c_s^2 = q^2 \frac{\omega_p |E_0|^2}{32\pi M n_0} \left[\frac{\cos^2 \theta_+}{\Omega_{\mathbf{k}}^t - \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^t + \Omega} + \frac{\cos^2 \theta_-}{\Omega_{\mathbf{k}}^t - \Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^t - \Omega} + \frac{\sin^2 \theta_+}{\Omega_{\mathbf{k}}^t - \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^t + \Omega} + \frac{\sin^2 \theta_-}{\Omega_{\mathbf{k}}^t - \Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^t - \Omega} \right], \quad (9.3)$$

$$\text{где } \cos^2 \theta_{\pm} = \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k} \pm \mathbf{q})^2}{k^2 |\mathbf{k} \pm \mathbf{q}|^2}; \quad \Omega_{\mathbf{k}}^t = \frac{1}{2} \omega_p \frac{k^2 c^2}{\omega_p^2}.$$

Переход к адиабатическому приближению состоит в том, что в правой части формулы (9.3) частота Ω полагается равной нулю. В полученном выражении можно, кроме того, пренебречь слагаемыми, содержащими частоты виртуальных поперечных волн $\Omega_{\mathbf{k}}^t$, поскольку $\Omega_{\mathbf{k}}^t \gg \Omega_{\mathbf{k}}^t$.

В итоге дисперсионное соотношение существенно упрощается и приобретает вид

$$\Omega^2 - q^2 c_s^2 = q^2 \frac{\omega_p |E_0|^2}{32\pi M n_0} \left[\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{k^2 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2} \frac{1}{\Omega_{\mathbf{k}}^t - \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^t} + \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{k^2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} \frac{1}{\Omega_{\mathbf{k}}^t - \Omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^t} \right]. \quad (9.4)$$

Отсюда сразу следует, что волновые векторы наиболее неустойчивых возмущений лежат вблизи резонансной поверхности

$$\Omega_{\mathbf{k} \pm \mathbf{q}}^t = \Omega_{\mathbf{k}}^t, \quad (9.5)$$

причем максимум инкремента отвечает возмущениям плотности с $|\mathbf{q}| = 2\mathbf{k}$, приводящим к рассеянию ленгмюровской волны назад. Для возмущений, удаленных от резонанса (9.5), неустойчивость имеет порог по интенсивности волны. Так, в частности, для $|\mathbf{q}| \gg k$ этот порог лежит при

$$|E_0|^2 / (n_0 T) = 24\pi q^2 r^2 D. \quad (9.6)$$

Более тщательный анализ уравнения (9.3) в окрестности резонанса с учетом частоты Ω в резонансном знаменателе позволяет найти максимальный инкремент неустойчивости, зависимость инкремента от длины волны возмущения и провести классификацию возможных режимов неустойчивости. Этот анализ, проделанный в [8, 9, 43], подробно описан в обзоре [10], и мы не будем повторять его здесь, поскольку нашей основной целью

является рассмотрение устойчивости широкого спектра волн. Сделаем только несколько замечаний, помогающих лучше понять ситуацию в случае широкого спектра.

Роль резонанса (9.5) в этом случае должна, очевидно, снижаться, поскольку наличие разброса волн по частотам не позволяет выполнить условие (9.5) сразу для всего спектра. Вместе с тем следует иметь в виду, что частотный спектр ленгмюровских волн вырожден (частота не зависит от направления волнового вектора), и если числа заполнения вырожденных состояний не совпадают, то резонансный процесс может приводить к быстрому перераспределению этих чисел, т. е. к рассеянию волн без существенного изменения их энергии. Поскольку характерное время этого процесса меньше времени развития модуляционной неустойчивости [44], будем в дальнейшем считать распределение волн эргодическим, т. е. зависящим только от частоты. Отметим, наконец, что вследствие подавления резонанса (9.5) модуляционная неустойчивость широкого спектра должна иметь конечный порог по интенсивности волн, сходный с порогом (9.6).

9.2. Неустойчивость широкого спектра волн. Первый шаг в исследовании этой неустойчивости был сделан в работе [8], авторы которой, действуя в рамках приближения геометрической оптики [уравнения (4.9), (4.12)], показали, что при достаточно высоком уровне ленгмюровской турбулентности в плазме возможен самопроизвольный рост возмущений плотности. Из результатов [8] следует, что инкремент этой неустойчивости увеличивается с уменьшением длины волны возмущения. Между тем уравнение (4.9) не позволяет проанализировать возмущения с малыми пространственными масштабами. Поэтому для вычисления максимального инкремента (равно как и для определения порога неустойчивости) необходимо воспользоваться более точным описанием ленгмюровских волн, т. е. обратиться к уравнениям (2.15), (2.21).

В отличие от монохроматической волны, являющейся точным решением системы (2.15), (2.21), суперпозиция волн этим свойством уже не обладает, так как пондеромоторная сила содержит интерференционные члены. Поскольку исходное состояние в виде набора волн нестационарно, сама постановка задачи о его устойчивости нуждается в уточнении. Если, однако, выполнены условия применимости адиабатического приближения, то этот вопрос снимается: интерференционные эффекты в такой ситуации пренебрежимо малы, и пондеромоторную силу в уравнении (2.15) можно заменить ее усредненным по фазам волн значением. Модифицированная таким образом система (2.15), (2.21) имеет стационарное решение в виде произвольного эргодического распределения ленгмюровских волн $N(\mathbf{k})$, где $N(\mathbf{k})$ — спектральная плотность волн, постоянная на энергетических по-

верхностях $\Omega_{\mathbf{k}}^i = \text{const}$ и нормированная условием

$$\int N(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = [1/(\delta\pi\omega_p)] \langle |E|^2 \rangle \equiv W/\omega_p \quad (9.7)$$

(угловые скобки означают усреднение по фазам).

Ввиду того что в адиабатическом приближении вклады различных плазмонов в пондеромоторную силу аддитивны, дисперсионное уравнение в случае широкого спектра можно получить из уравнения (9.4) посредством замены величины $|E_0|^2/(\delta\pi)$ на $\omega_p N(\mathbf{k})$ и интегрирования по \mathbf{k} [45]:

$$\Omega^2 = q^2 c_s^2 + \frac{q^2 \omega_p^2}{4Mn_0} \int \frac{(k^2 - q^2/4)^2}{|k + q/2|^2 |k - q/2|^2} \frac{N(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2) - N(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2)}{\zeta_{\mathbf{k} + \mathbf{q}/2}^i - \zeta_{\mathbf{k} - \mathbf{q}/2}^i} d\mathbf{k}. \quad (9.8)$$

При записи этой формулы дополнительно проведены замены переменных, приводящие оба слагаемых в правой части (9.4) к общему знаменателю.

Заметим, что полученное уравнение нетрудно обобщить на случай плазмы, находящейся в слабом внешнем магнитном поле ($\omega_{He} \ll \omega_{pe}$). Для этого следует лишь соответствующим образом «подправить» закон дисперсии волн $\Omega_{\mathbf{k}}^i$ и учесть влияние поля на движение ионов, для чего достаточно домножить величину Ω^2 в формуле (9.8) на следующую дробь [46]:

$$(\Omega^2 - \omega_{Hi}^2)/[\Omega^2 - (\mathbf{qH}/qH)^2 \omega_{Hi}^2].$$

Рассмотрим сначала с помощью уравнения (9.8) поведение длинноволновых возмущений. С этой целью разложим подынтегральное выражение в ряд по \mathbf{q} с точностью до квадратичных членов включительно. В результате получим

$$\Omega^2 = q^2 c_s^2 \left[1 + \frac{W}{12n_0 T k_0^2 r_D^2} (I_1 + I_2 q^2/k_0^2) \right], \quad (9.9)$$

где

$$W \equiv \omega_p \int N d\mathbf{k}; \quad (9.10)$$

$$k_0^2 \equiv \int k^2 N d\mathbf{k} / \int N d\mathbf{k}; \quad (9.11)$$

$$I_1 \equiv \frac{k_0^2 \omega_p}{W} \int \frac{n}{(kn)} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}} d\mathbf{k}; \quad (9.12)$$

$$I_2 \equiv \frac{k_0^4 \omega_p}{W} \int \left\{ \frac{n_\alpha n_\beta n_\gamma}{24} \frac{\partial^3 N}{\partial k_\alpha \partial k_\beta \partial k_\gamma} + \frac{1}{k^2} \left[\left(\frac{kn}{k} \right)^2 - 1 \right] n \frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}} \right\} \frac{d\mathbf{k}}{(kn)}; \quad (9.13)$$

$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{q}/q.$$

Безразмерные формфакторы I_1 и I_2 введены таким образом, что для спектра с шириной порядка k_0 они по модулю оценочно равны единице. В зависимости от вида функции $N(\mathbf{k})$ эти величины могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если порог неустойчивости соответствует возмущениям с $q \rightarrow 0$, то $I_1 < 0$, а $I_2 > 0$. Эти неравенства необходимы, но, вообще говоря, не достаточны для того, чтобы на пороге росли именно длинноволновые возмущения, однако примеры спектров, для которых порог действительно лежит в длинноволновой области, существуют. Обозначив ε относительное превышение энергии волн над порогом, можно переписать формулу (9.9) в виде

$$\Omega^2 = q^2 c_s^2 \left[-\varepsilon + \frac{q^2}{k_0^2} \frac{I_2}{|I_1|} \right]. \quad (9.14)$$

Отсюда следует, что максимум инкремента достигается при $q = k_0 |\varepsilon I_1 / (2I_2)|^{1/2} \ll k_0$ и равен $(1/2) \varepsilon k_0 c_s |I_1 / I_2|^{1/2}$, а область неустойчивости простирается от $q = 0$ до $q = k_0 |\varepsilon I_1 / I_2|^{1/2}$.

Если $I_1 > 0$ или $I_2 < 0$, то на пороге неустойчивости волновое число q отлично от нуля. В этом случае в уравнении (9.8) удобно провести разложение в окрестности наиболее «неустойчивого» значения q , которое обозначим q_0 . В результате получим

$$\Omega^2 = q_0^2 c_s^2 [-\varepsilon + (A/k_0^2) (q - q_0)^2], \quad (9.15)$$

где A — положительный коэффициент, зависящий от формы спектра. Ширина неустойчивой зоны по $q - q_0$ в данном случае оценочно остается такой же, как и при длинноволновой неустойчивости, но максимальный инкремент теперь пропорционален не ε , а $\varepsilon^{1/2}$.

Формулы (9.14) и (9.15), соответствующие малой надпороговости, пригодны вплоть до $\varepsilon \sim 1$. На пределе их применимости [$W / (n_0 T) \sim k_0^2 r_D^2$] максимум инкремента достигается при $q \sim k_0$ и дается оценкой

$$\gamma_{\max} \sim k_0 c_s. \quad (9.16)$$

По мере увеличения W область неустойчивости охватывает все большие значения q . Так, при $W / (n_0 T) \gg k_0^2 r_D^2$ становятся неустойчивыми возмущения с $q \gg k_0$. Для этих возмущений дисперсионное соотношение (9.8) дает

$$\Omega^2 - q^2 c_s^2 = -W / (9M n_0 r_D^2). \quad (9.17)$$

Верхняя граница области неустойчивости по q лежит в этом случае при

$$q = (1/3r_D) (W/n_0 T)^{1/2}, \quad (9.18)$$

а максимальный инкремент равен

$$\gamma_{\max} = \frac{\omega}{3} \left(\frac{m}{M} \frac{W}{n_0 T} \right)^{1/2}. \quad (9.19)$$

Отметим, что, несмотря на расширение области неустойчивости, инкремент по-прежнему достигает максимума при $q \sim k_0$.

9.3. Неустойчивость в плазме с горячими ионами [47]. Обсуждая в п. 9.2 модуляционную неустойчивость в плазме с холодными ионами, мы фактически ограничились той областью параметров, где отношение инкремента γ к волновому числу q велико по сравнению с ионной тепловой скоростью v_{Ti} :

$$\gamma/q \gg v_{Ti}. \quad (9.20)$$

Вблизи порога неустойчивости, где инкремент мал, это ограничение может оказаться весьма жестким. Последнее видно, в частности, на примере изотермической плазмы с $T_e \sim T_i$, в которой уравнение (2.15) вообще непригодно для рассмотрения режима малой надпороговости ($\varepsilon \ll 1$). Исследование модуляционной неустойчивости в условиях, когда неравенство (9.20) нарушено, требует перехода от уравнений гидродинамики к описанию ионов с помощью кинетического уравнения (2.17).

Найдем из этого уравнения линейное по низкочастотному полю E' возмущение плотности ионов. В представлении Фурье

$$n_{q\Omega} = \frac{ie}{q} (E'_{q\Omega} q) \int \frac{df_i/dp}{qv - \Omega} dp, \quad (9.21)$$

где f_i — невозмущенная функция распределения ионов, проинтегрированная по поперечным по отношению к q составляющим импульса; эту функцию в дальнейшем будем считать максвелловской. Исключив из (9.21) $E'_{q\Omega}$ с помощью формулы (2.12) и воспользовавшись условием квазинейтральности, получим следующую связь $n_{q\Omega}$ с компонентами Фурье поперечной силы:

$$\left[\frac{1}{16\pi n_0} |E'_{q\Omega}|^2 + \frac{T_e}{n_0} n_{q\Omega} \right] \int \frac{q df_i/dp}{qv - \Omega} dp = n_{q\Omega}. \quad (9.22)$$

Второе соотношение между $|E'_{q\Omega}|^2$ и $n_{q\Omega}$, получающееся из уравнения (2.21) с использованием адиабатичности и усреднения по фазам, выглядит точно так же, как и в рассмотренном ранее в п. 9.2 случае холодных ионов. Объединив его с (9.22), получим в итоге следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[\frac{T_e}{n_0} + F(q) \right] \int \frac{q(df_i/dp)dp}{qv - \Omega} = 1, \quad (9.23)$$

где

$$F(q) = \frac{\omega_p^2}{4n_0^2} \int \frac{(k^2 - q^2/4)^2}{|k + q/2|^2 |k - q/2|^2} \frac{N(k + q/2) - N(k - q/2)}{\Omega_{k+q}^l - \Omega_{k-q}^l} dk. \quad (9.24)$$

В пределе $T_i = 0$ это уравнение переходит в (9.8).

Покажем прежде всего, что при учете теплового движения ионов модуляционная неустойчивость остается аperiodической, т. е. в неустойчивой ситуации $\text{Re } \Omega = 0$. Для этого заметим, что вследствие вещественности $F(\mathbf{q})$ мнимая часть интеграла по импульсам ионов должна обращаться в нуль, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_i/dp}{(qv - \text{Re } \Omega)^2 + \gamma^2} dp = 0. \quad (9.25)$$

Воспользуемся четностью функции распределения ионов и выделим в подынтегральном выражении четную по v часть:

$$\int_0^{\infty} \frac{qv(\text{Re } \Omega)(df_i/dp)}{[v^2v^2 + (\text{Re } \Omega)^2 + \gamma^2]^2 - 4q^2v^2(\text{Re } \Omega)^2} dp = 0. \quad (9.26)$$

Ввиду знакоопределенности функции $v df_i/dp$ это соотношение дает $\text{Re } \Omega = 0$.

Из приведенного рассуждения видно, что на пороге неустойчивости $\Omega = 0$. Поэтому пороговая интенсивность ленгмюровских волн определяется соотношением

$$F(q_0) = -(T_e + T_i)/n_0, \quad (9.27)$$

где q_0 — точка минимума функции F [см. (9.24)]. Вблизи порога, т. е. при

$$\gamma/q \ll v_{Ti}, \quad (9.28)$$

инкремент неустойчивости γ можно найти в явном виде, поскольку интеграл по импульсам в этом предельном случае легко вычисляется:

$$\int \frac{v df_i/dp}{qv - \Omega} dp \approx -\frac{n_0}{T_i} \left(1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma}{qv_T} \right). \quad (9.29)$$

Отсюда

$$\gamma = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} v_{Ti} q \left[\frac{T_e + T_i}{T_i} + \frac{n_0}{T_i} F(q) \right]. \quad (9.30)$$

Если порог отвечает длинноволновым возмущениям, то

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_{Ti} q \frac{T_e + T_i}{T_i} \left[\varepsilon - \frac{q^2}{k_0^2} \frac{I_2}{|I_1|} \right], \quad (9.31)$$

где ε — относительное превышение интенсивности волны над порогом, а величины k_0^2 , I_1 и I_2 определены формулами (9.11) — (9.13). В отличие от случая холодных ионов максимальное значение инкремента здесь пропорционально не ε , а $\varepsilon^{3/2}$. Если же на пороге возбуждается волна с конечным значением q , то

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_{Ti} q \frac{T_e + T_i}{T_i} \left[\varepsilon - \frac{A}{2} (q - q_0)^2 \right], \quad (9.32)$$

где

$$A = \frac{n_0}{T_e + T_i} \left(\frac{d^2 F}{dq^2} \right)_{q=q_0} > 0. \quad (9.33)$$

В максимуме инкремент (9.32) пропорционален ε . При достаточно больших значениях ε , когда начинает выполняться неравенство (9.20), неустойчивость переходит в гидродинамический режим, и ее инкремент определяется формулами, приведенными в п. 9.2.

10. Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в одномерной модели

В одномерной задаче, где исключена возможность ленгмюровского коллапса, нелинейность уравнений (2.15), (2.21) должна в конечном счете останавливать рост модуляционных возмущений. В зависимости от поведения амплитуды нелинейных колебаний при переходе через порог неустойчивости принято различать два режима роста возмущений: мягкий и жесткий. В первом из них амплитуда при небольшом превышении над порогом оказывается малой, а во втором она при сколь угодно малой надпороговости достигает конечного значения.

Покажем, что в случае длинноволновой неустойчивости всегда реализуется жесткий режим; если же неустойчивость коротковолновая, то ситуация зависит от спектрального распределения плазмонов и возможны оба варианта (см. п. 10.2).

10.1. Длинноволновая неустойчивость [45]. Чтобы вывести упрощенное уравнение, описывающее нелинейную стадию неустойчивости, вернемся к дисперсионному соотношению (9.14). Домножив обе его части на $n_{q\Omega}$ и выполнив обратное преобразование Фурье, получим, что в одномерном случае

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n + \varepsilon c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} n + \frac{I_2}{|I_1|} \frac{c_s^2}{k_0^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} n = 0. \quad (10.1)$$

Входящие сюда величины k_0 , I_1 и I_2 определяются одномерными аналогами выражений (9.11) — (9.13) и имеют вид:

$$k_0^2 = \int k_x^2 N(k_x) dk_x / \int N(k_x) dk_x;$$

$$I_1 = \frac{k_0^2 \omega}{W} \int \frac{1}{k_x} \frac{dN}{dk_x} dk_x;$$

$$I_2 = \frac{k_0^4 \omega}{24W} \int \frac{1}{k_x} \frac{d^3 N}{dk_x^3} dk_x,$$

где $N(k_x)$ — одномерная спектральная функция, нормированная условием

$$\int N dk_x = W/\omega_p.$$

Требование равнораспределения волн по энергетической поверхности означает, что функция $N(k_x)$ должна быть четной.

Сравнение уравнения (10.1) с исходным уравнением для n [см. (2.15)] показывает, что в линейной задаче роль пондеромоторной силы сводится к перенормировке скорости звука и добавлению дисперсии. Дисперсия в данном случае обусловлена малыми поправками порядка q^2/k_0^2 . Поэтому при вычислении нелинейной добавки к пондеромоторной силе ею можно пренебречь. Это позволяет определить искомую добавку с помощью уравнения (4.9), которое в размерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} + 3\omega_p r_D^2 k_x \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\omega_p}{n_0} \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial k_x} = 0. \quad (10.2)$$

Поскольку неустойчивость развивается адиабатически медленно, распределение плазмонов успевает подстраиваться под возмущения плотности плазмы. При этом линейная по n добавка к невозмущенной спектральной функции плазмонов $N(k_x)$ вносит в пондеромоторную силу вклад, приводящий к уравнению (10.1) с нулевой дисперсией. Квадратичная же добавка к $N(k_x)$ равна

$$N^2(k_x; \lambda; t) = \frac{n^2 - \langle n^2 \rangle}{72n_0^2 r_D^4} \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial k_x} \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial k_x} N(k_x), \quad (10.3)$$

где угловые скобки означают усреднение по пространству. Разложение здесь ведется по параметру $n/(n_0 k_0^2 r_D^2)$, малость которого означает малость числа захваченных плазмонов по сравнению с числом пролетных.

Учет поправки (10.3) приводит к замене правой части уравнения (10.1) величиной

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\omega_p}{2M} \int N^{(2)}(k_x; \lambda; t) dk_x.$$

В результате имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n + \epsilon c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} n + \frac{I_2}{|I_1|} \frac{c_s^2}{k_0^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} n = \frac{c_s^2 I_3'}{n_0 k_0^2 r_D^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n^2, \quad (10.4)$$

где $I_3 = \frac{W}{12n_0 T k_0^2 r_D^2} I_2$. В полученном уравнении удобно сделать следующие замены:

$$\lambda \rightarrow \frac{2}{k_0} \left| \frac{I_2}{I_1 \epsilon} \right|^{1/2} \lambda; \quad t \rightarrow \frac{2}{k_0 c_s \epsilon} \left| \frac{I_2}{I_1} \right|^{1/2} t;$$

$$n \rightarrow \frac{3}{4} \frac{n_0 k_0^2 r_D^2}{I_3} \epsilon u.$$

Посредством этих замен уравнение (10.4) приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{1}{4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u = \frac{3}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2. \quad (10.5)$$

Отметим, что в новой записи рассматриваемое уравнение уже не содержит малого параметра ε . Поэтому при мягком режиме насыщения неустойчивости все его решения, отвечающие малым начальным возмущениям, обязательно ограничены. Жесткому же режиму, напротив, соответствуют неограниченно растущие решения.

Уравнение (10.5) относится к числу нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния [48], что дает возможность построить ряд его аналитических решений (см. приложение 2). Приведем простейшее из них:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{2k^2} &= \frac{1 - \rho \cos(kx + \theta)}{[\rho - \cos(kx + \theta)]^2}; \\ \rho(t) &= \frac{k}{2\iota} \exp\left(-\frac{3^{1/2}}{2} kxt\right) + \frac{a}{2k} \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) \exp\left(\frac{3^{1/2}}{2} kxt\right). \end{aligned} \right\} (10.6)$$

Входящие сюда константы a , θ , k и κ вещественны, причем a и θ произвольны, а k и κ связаны соотношением

$$k^2 + 3\kappa^2 = 4. \quad (10.7)$$

Решение (10.6) примечательно тем, что оно демонстрирует возникновение сингулярности при нелинейной эволюции синусоидального возмущения малой амплитуды (рис. 12). У такого возмущения $\rho(0) \gg 1$, а знаки k и κ одинаковы. На не слишком больших временах формула (10.6) описывает линейную стадию неустойчивости:

$$u \approx -4ak \exp[(3^{1/2}/2)kxt] \cos(kx + \theta). \quad (10.8)$$

С ростом возмущения его форма начинает отклоняться от синусоидальной: максимумы становятся более пологими, а минимумы — резкими (рис. 12, б). При $\rho = 2$ обращаются в нуль первые три производные функции $u(x, t)$ в ее максимумах. Затем на месте каждого прежнего максимума возникает минимум, а в его окрестности появляются два симметрично расположенных максимума (рис. 12, в). При $\rho \rightarrow 1$ новые максимумы приближаются к точкам $x = x_s = (2\pi s - \theta)/k$, где функция $u(x)$ имеет абсолютные минимумы и решение становится сингулярным.

Особенность возникает в момент времени

$$t = t_s = \frac{2}{3^{1/2} k \kappa} \ln \frac{\kappa k}{(x + k)a}.$$

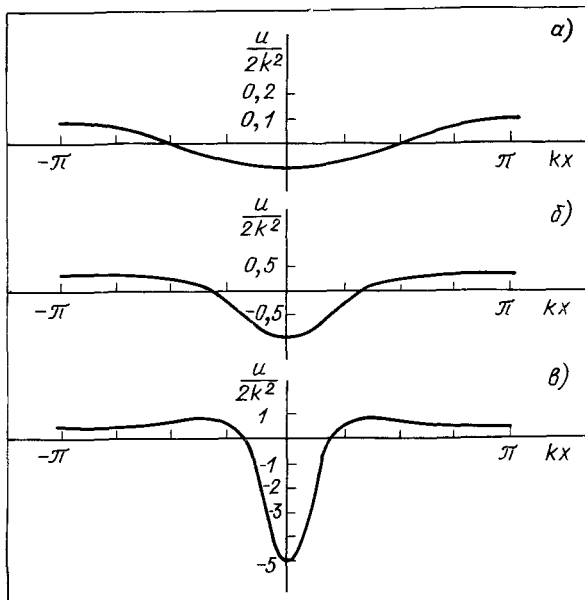


Рис. 12. Эволюция неустойчивого возмущения плотности с малой начальной амплитудой

Приближение к ней происходит по автомодельному закону

$$u(\lambda; t) = \frac{-4}{3^{1/2}(t_s - t)} \frac{1 - (x - x_s)^2/3^{1/2}(t_s - t)}{[1 + (x - x_s)^2/3^{1/2}(t_s - t)]^2}. \quad (10.9)$$

Эта функция является точным решением уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \frac{1}{4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u - \frac{3}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 = 0, \quad (10.10)$$

получающегося из (10.5), если пренебречь вблизи особенности второй пространственной производной u по сравнению с четвертой. Примечательно, что особенность (когда она возникает) имеет вид (10.9) не только для начального условия в виде отдельной синусоидальной волны, но и при любом другом начальном условии. Начальное условие определяет лишь место x_s и время t_s появления особенности [45].

Приведенное решение показывает, что в области применимости уравнения (10.5) неустойчивость не стабилизируется. Независимо от значения надпороговости возмущения плотности плазмы достигают уровня $n/n_0 \sim k^2 r_D^2$, соответствующего границе применимости нашего подхода. Пространственный масштаб возмущений при этом сравнивается с характерной длиной волны ленгмюровских колебаний k_0^{-1} .

В системе, близкой к порогу неустойчивости, глубокие каверны на профиле плотности возникают на большом удалении друг от друга (расстояние между ними пропорционально $\varepsilon^{-1/2}$). Эти каверны внешне напоминают ленгмюровские солитоны, но в отличие от солитона структура каверны определяется не только захваченными, но и пролетными плазмонами. Аналитически описать всю эволюцию каверны, включая остановку сжатия, не удастся. Можно, однако, воспользовавшись адиабатичностью задачи, найти число плазмонов, попадающих в связанное состояние. Для этого заметим, что возмущение с пространственным периодом $2\pi/q_0$ уже на линейной стадии неустойчивости расслаивает спектр плазмонов на энергетические зоны, переходы между которыми в адиабатическом приближении запрещены. С увеличением амплитуды возмущения нижняя зона, куда входят плазмоны с исходными волновыми числами $|k_x| \leq q_0/2$, сдвигается в сторону меньших частот и, сужаясь, превращается в набор солитоноподобных состояний. Если пренебречь возможным спонтанным нарушением периодичности системы, то можно сделать вывод, что плазмоны, находящиеся в нижней зоне, образуют на каждом периоде исходного синусоидального возмущения по одному солитону с числом плазмонов

$$N_c = \frac{2\pi}{q_0} \int_{-q_0/2}^{q_0/2} N(k_x) \delta k_x. \quad (10.11)$$

Отсюда, в частности, следует, что основная доля плазмонов может захватиться в солитоны только при достаточно большой надпороговости.

В заключение укажем, что вывод о жесткости нелинейной стадии длинноволновой неустойчивости справедлив не только в рассмотренном здесь случае нулевой температуры ионов, но также и при конечной ионной температуре [47].

10.2. Коротковолновая неустойчивость [51]. Коротковолновая модуляционная неустойчивость характеризуется тем, что на ее пороге волновое число нарастающего возмущения q_0 отлично от нуля и в общем случае сопоставимо с волновыми числами плазмонов. В плазме с холодными ионами инкремент такой неустойчивости задается формулой (9.15). Выше уже упоминалось, что возбуждение коротковолновых возмущений может быть как жестким, так и мягким. Из дальнейшего будет видно, что в одномерной задаче характер возбуждения определяется плазмонами с волновыми числами, близкими к $q_0/2$, находящимися в резонансе с рассматриваемым возмущением. Роль этого резонанса зависит от знака производной спектральной функции плазмонов $N(k)$ в точке $k = |q_0/2|$. При положительной производной резонанс оказывается дестабилизирующим, что соответ-

ствуется жесткому нелинейному режиму. Если же $\left. \frac{\partial N}{\partial k} \right|_{k=|q_0/2|} < 0$, то наличие резонанса ведет к стабилизации неустойчивости и реализации мягкого режима.

Перейдем к обоснованию сделанных утверждений. Исходными уравнениями при этом будут служить уравнения, получающиеся из адиабатического гамильтониана (4.7). Их в данном случае удобно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(n + \sum_p N_p \frac{\delta \lambda_p}{\delta n} \right); \quad (10.12)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n \right) \psi_p = \lambda_p \psi_p. \quad (10.13)$$

Числа заполнения энергетических уровней N_p являются здесь интегралами движения. Для нумерации уровней считается, что система занимает конечный объем $-L/2 < x < L/2$. Собственные значения «энергии» λ_p определяются из уравнения (10.13) (с периодическими граничными условиями) и рассматриваются как функционалы $n(x; t)$. В отсутствие возмущения

$$\lambda_p = (2\pi p/L)^2, \quad p=0; \pm 1; \pm 2 \dots \quad (10.14)$$

В дальнейшем будем нумеровать уровни значениями волнового числа

$$k_p = 2\pi p/L, \quad (10.15)$$

полагая $\lambda_p = \lambda(k_p)$. При этом числа заполнения N_p связаны с невозмущенной спектральной плотностью плазмонов $N(k)$ соотношением

$$N_p = 2\pi N(k_p), \quad (10.16)$$

где множитель 2π отвечает следующей нормировке:

$$\sum_p N_p = L \int N(k) dk = \int |E|^2 dx. \quad (10.17)$$

Заметим, что дисперсионное соотношение линейной задачи можно получить из уравнения (10.12), рассчитав $\lambda(k)$ по обычной теории возмущений (см., например, [21]) с точностью до квадратичных по n членов. Обозначим $\tilde{\lambda}$ соответствующее приближенное выражение для λ . Тогда

$$\tilde{\lambda}(k) = k^2 + L \int \frac{|n_{k-k_1}|^2}{k^2 - k_1^2} \frac{dk_1}{2\pi}; \quad (10.18)$$

$$n_q = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} n \exp(-iqx) dx. \quad (10.19)$$

Подстановка $\tilde{\lambda}$ в уравнение (10.12) и переход в этом уравнении к представлению Фурье дают одномерный аналог соотношения (9.8):

$$\frac{\Omega^2}{q^2} = S_q^2 \equiv 1 + \int \frac{N(k+a/2) - N(k-a/2)}{2kq} dk. \quad (10.20)$$

При малой надпороговости ($0 < \varepsilon \ll 1$)

$$\Omega^2 = q^2 [-\varepsilon + \alpha(q - q_0)^2 / q_0^2], \quad (10.21)$$

где α — положительный коэффициент порядка единицы.

На линейной стадии неустойчивости возмущение представляет собой волну с волновым числом q_0 и плавной огибающей. Пространственный и временной масштабы изменения огибающей пропорциональны $\varepsilon^{-1/2}$. В нелинейном режиме к основной волне добавляются кратные ей пространственные гармоники и возмущение приобретает вид

$$n = u_0 + [u_1 \exp(iq_0 x) + \text{к.с.}] + [u_2 \exp(2iq_0 x) + \text{к.с.}] \quad (10.22)$$

Огибающие гармоник u_r по-прежнему можно считать плавными. Чтобы выделить в уравнении (10.12) вклад нелинейности, введем нелинейную добавку $\lambda'(k)$ к «энергии» плазмона:

$$\lambda'(k) = \lambda(k) - \tilde{\lambda}(k). \quad (10.23)$$

Представив возмущение плотности в виде (10.22) и приняв во внимание соотношения (10.20), (10.21), получим из уравнения (10.12) следующие уравнения для огибающих:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[S_0^2 u_0 + \frac{\delta}{\delta u_0} L \int \lambda'(k) N(k) dk \right]; \quad (10.24)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 = \varepsilon q_0^2 u_1 + \alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - q_0^2 \frac{\delta}{\delta u_1^*} L \int \lambda'(k) N(k) dk; \quad (10.25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_r = -r^2 q_0^2 \left[S_{r q_0}^2 u_r + \frac{\delta}{\delta u_r^*} L \int \lambda'(k) N(k) dk \right], \quad r \geq 2. \quad (10.26)$$

Ввиду того что в линейном приближении неустойчива только основная гармоника, а все остальные рождаются из нее вследствие нелинейного взаимодействия, амплитуды гармоник с $r \geq 2$ должны быть пропорциональными u_1 и, следовательно, относительно малыми. Поэтому в системе (10.24) — (10.26) достаточно ограничиться учетом лишь основной, нулевой и второй гармоник. Кроме того, в силу медленности изменения огибающих в уравнении для второй гармоники можно пренебречь производной $\partial^2 u_2 / \partial t^2$ и записать это уравнение в виде

$$u_2 = - \frac{L}{S_{2q_0}^2} \frac{\delta}{\delta u_2^*} \int \lambda'(k) N(k) dk. \quad (10.27)$$

В действительности даже нулевая и вторая гармоники в большинстве случаев несущественны, поскольку их вклады в уравнение (10.25) малы по сравнению с обсуждаемым ниже резонансным вкладом.

Роль резонанса проще всего показать на примере монохроматического возмущения, у которого огибающая u_1 не зависит от x . При этом нулевая гармоника отсутствует, а вторая гармоника вносит в уравнение (10.25) вклад, пропорциональный u^3 , имеющий ту же природу, что и кубичные по амплитуде члены в простейшей задаче о нелинейном осцилляторе [52]. Что же касается резонансного вклада, то он связан с появлением в энергетическом спектре плазмонов запрещенной зоны и квадратичен по u_1 .

При малой амплитуде возмущения положение запрещенной зоны соответствует плазмонам с $k \approx \pm q_0/2$. В окрестности этой зоны $\lambda(k)$ можно найти посредством теории возмущений с двукратным вырождением. С достаточной для дальнейшего степенью точности

$$\lambda(k) = \frac{q_0^2}{4} + \left(|k| - \frac{q_0}{2} \right) \left[q_0^2 + \frac{|u_1|^2}{(|k| - q_0/2)^2} \right]^{1/2}. \quad (10.28)$$

График этой функции изображен на рис. 13. Там же показана зависимость

$$\tilde{\lambda}(k) = \frac{k^2}{4} + \frac{|u_1|^2}{(2|k| - q_0)q_0}. \quad (10.29)$$

«Энергия» $\tilde{\lambda}$, вычисленная по формуле (10.29), больше истинной, если $|k| > q_0/2$, и меньше нее, если $|k| < q_0/2$. Поэтому знак входящей в уравнение (10.25) величины $\int \lambda'(k) N(k) dk$, которую можно интерпретировать как нелинейную добавку к плотности энергии газа плазмонов, противоположен знаку

$N' \equiv \left. \frac{\partial N}{\partial k} \right|_{k=q_0/2}$. Если $N' > 0$, то возмущению энергетически выгодно расти и режим нелинейной стабилизации является жестким: стабилизация наступает только при $|u_1| \sim q^2_0$. В противоположном случае ($N' < 0$) монохроматическая волна возбуждается мягко. Вычислив $\int \lambda'(k) N(k) dk$ и подставив результат в (10.25), получим уравнение

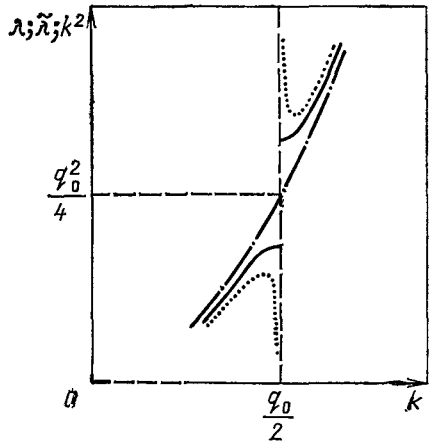
$$\partial^2 u_1 / \partial t^2 = u_1 (q^2_0 \varepsilon + 2|u_1| N'), \quad (10.30)$$

из которого следует, что нелинейная стабилизация в случае $N' < 0$ наступает при $|u_1| \sim \varepsilon q^2_0$.

Укажем теперь область применимости приближения монохроматической волны. Возмущение можно считать монохроматическим, если масштаб l изменения огибающей $u_1(x)$ велик по

Рис. 13. Окрестность резонанса:

точная зависимость $\lambda(k)$ показана сплошной линией, зависимость $\tilde{\lambda}(k)$, отвечающая линейной теории неустойчивости, — линией, составленной из точек, а невозмущенная дисперсионная кривая $\lambda = k^2$ — штрихпунктирной линией



сравнению с длиной пробега плазмона за время развития неустойчивости. Поскольку групповая скорость плазмонов считается здесь сверхзвуковой, а неустойчивость развивается медленно, ограничение на l содержит параметр адиабатичности g и называется весьма жестким:

$$l \gg \varepsilon^{-1/2} q^{-1} g^{-1}. \quad (10.31)$$

В этом смысле интересен вопрос о стабилизации возмущений, растущих из шумов, для которых огибающая является случайной функцией. Пространственный масштаб изменения огибающей такого возмущения определяется шириной области неустойчивости ($l \sim q^{-1} \varepsilon^{-1/2}$) и удовлетворяет неравенству, противоположному (10.31). Оценим значение амплитуды u , при котором становится существенной нелинейность данного возмущения. Если предположить, что u удовлетворяет условию

$$|u| \ll \varepsilon^{1/2} q^2, \quad (10.32)$$

то ширину резонансной области для рассматриваемого возмущения можно оценить как

$$\Delta q \sim q_0 \varepsilon^{1/2}. \quad (10.33)$$

Для отдельной монохроматической волны ширина резонанса определяется ее амплитудой и согласно формуле (10.26) равна

$$\delta q \sim |u_1| / q_0. \quad (10.34)$$

Область Δq может вместить $\Delta q / \delta q$ монохроматических волн, каждая из которых взаимодействует со своей группой резонансных плазмонов и, достигнув амплитуды εq^2 , становится нелинейной. Поскольку волны независимы, средний квадрат возму-

щения плотности равен сумме квадратов их амплитуд, т. е.

$$|u|^2 \sim q^4_0 \varepsilon^2 \Delta q / (\delta q) \sim \varepsilon^{3/2} q^4_0. \quad (10.35)$$

Отметим, что при $\varepsilon \ll 1$ полученное значение $|u|$ действительно удовлетворяет первоначально введенному условию (10.32). По аналогии со случаем монохроматической волны естественно предположить, что нелинейность является стабилизирующей при $N' < 0$ и дестабилизирующей в противоположном случае. Точное решение задачи о случайном возмущении, построенное в [51], подтверждает справедливость этого предположения и оценки (10.35), а решение соответствующей задачи для плазмы с горячими ионами [47] показывает, что резонансная нелинейность здесь играет ту же роль, что и в случае нулевой ионной температуры.

11. Флюктуационное формирование солитонов

Тенденцию ленгмюровских волн к образованию солитонов, проявляющуюся, в частности, при одномерном численном моделировании плазменной турбулентности [42, 53], обычно связывают с модуляционной неустойчивостью. При достаточно высоком уровне турбулентности, когда энергия волн заметно превышает порог неустойчивости, это вполне оправдано. Однако численные расчеты свидетельствуют также о том, что солитоны могут рождаться и в подпороговом режиме [54]. Здесь их появление обязано флюктуациям плотности свободных плазмонов [34]. Двигаясь независимо друг от друга, плазмоны время от времени образуют сгустки, которые и служат зародышами солитонов. Превращение спонтанно возникшего сгустка в солитон демонстрирует способность устойчивой нелинейной системы сохранять память о достаточно сильных флюктуациях.

Динамика образования солитона из отдельного сгустка была рассмотрена в § 8. Высказанные там качественные соображения помогают оценить пространственный масштаб и амплитуду флюктуаций, выступающих в роли затравочных сгустков.

Вернемся к уравнениям (4.1), (4.2) и рассмотрим комплексное электрическое поле $E_l(x)$, представляющее собой суперпозицию большого числа фурье-гармоник со случайными фазами (индексом l обозначен пространственный корреляционный масштаб поля).

В любой точке x вещественная R и мнимая I части $E_l(x)$ являются статистически независимыми величинами, распределенными по нормальному закону

$$f(R, I) dR dI = \frac{1}{\pi W_{0l}} \exp\left(-\frac{R^2 + I^2}{W_{0l}}\right) dR dI, \quad (11.1)$$

где $W_{0l} \equiv \langle |E_l(x)|^2 \rangle$ (угловые скобки означают усреднение по ансамблю).

По распределению (11.1) нетрудно оценить вероятность того, что число плазмонов на некотором интервале порядка корреляционной длины l превышает N_l :

$$P(N_l) \sim \exp[-N_l/(lW_{0l})]. \quad (11.2)$$

Если на оси x выделено несколько таких интервалов, то по смыслу величины l числа плазмонов на непересекающихся интервалах можно считать статистически независимыми.

Допустим теперь, что поле $E_l(x)$ представляет собой длинноволновую часть полного поля плазмонов $E(x)$, корреляционный масштаб которого равен единице. Кроме того, предположим, что рассматриваемые длинноволновые плазмоны все еще можно считать сверхзвуковыми, т. е.

$$l \ll g^{-1}. \quad (11.3)$$

Если спектр гармоник поля $E(x)$ сходен с гауссовым, то величину W_{0l} для длинных волн можно оценить как W_0/l , где $W_0 \equiv \langle |E(x)|^2 \rangle$. В результате формула (11.2) приобретает вид

$$P(N_l) \sim \exp(-N_l/W_0), \quad (11.4)$$

не зависящий от конкретного значения корреляционной длины l .

Из-за экспоненциального убывания $P(N_l)$ с увеличением N_l солитоны с числом плазмонов $N > W_0$ рождаются прежде всего из тех флуктуаций, которым отвечает достаточно высокая (порядка единицы) вероятность перехода плазмонов в связанное состояние. Соответствующий процесс уместно назвать *самозахватом*.

Для самозахвата сгустка плазмонов, имеющего ширину l и не обладающего дополнительным внутренним масштабом, глубина n потенциальной ямы, создаваемой этим сгустком за время его свободного разлета

$$\tau_l \sim gl^2, \quad (11.5)$$

должна быть сопоставимой с характерным значением кинетической энергии плазмона l^{-2} . Оценив значение n с помощью уравнения (4.2) как

$$n \sim \tau_l^2 N l^{-3}, \quad (11.6)$$

можно записать условие $n \sim l^{-2}$ в следующем виде:

$$N \sim g^{-2} l^{-3}. \quad (11.7)$$

Заметим, что благодаря неравенству (11.3) ширина солитона с числом плазмонов (11.7), равная по порядку величины $g^2 l^3$, оказывается малой по сравнению с l . Поэтому сгусток плазмонов, образовавшийся при самозахвате связанное состояние, дол-

жен в дальнейшем сжаться в $g^{-2}l^{-2}$ раз. Длительность такого сжатия, имеющего автомодельный характер (8.35), по порядку величины не превышает длительности самозахвата. Это позволяет оценить время формирования солитона с числом плазмонов $N > g$ по формуле (11.5), положив в ней $l \sim (g^2 N)^{-1/3}$:

$$\tau_N \sim g^{-1/3} N^{-2/3}. \quad (11.8)$$

Согласно соотношениям (11.4), (11.8), плотность солитонов $\nu(N; t)$ с числом захваченных плазмонов, превышающим N , растет со временем по закону

$$\nu(N; t) \sim g N t \exp(-N/W_0) \quad (11.9)$$

до тех пор, пока в исходном спектре не исчерпается запас плазмонов с $k \leq g^{2/3} N^{1/3}$. В этой оценке учтено, что область формирования отдельного солитона имеет ширину порядка размера захватываемого в солитон сгустка, т. е. $(g^2 N)^{-1/3}$.

Чисто формально из оценки (11.9) следует, что для рассматриваемой системы наиболее характерны солитоны с $N \sim W_0$. Здесь, однако, необходимо сделать два замечания. Во-первых, под порогом модуляционной неустойчивости, т. е. при $W_0 < 1$, локальное значение $|E|^2$ в солитонах с $N \sim W_0$, равное по порядку W_0^2 , мало по сравнению со средним по длине системы значением $|E|^2$, равным W_0 . Такие солитоны практически неразличимы на фоне исходного распределения плазмонов и, следовательно, не представляют большого интереса (солитоны начинают заметно выделяться из фона только при $N \sim W^{1/2}$). Во-вторых, по мере рождения солитонов с $N \sim W_0$ в них постепенно захватываются все имеющиеся в исходном спектре плазмоны с длинами волн порядка $(g^2 W_0)^{-1/3}$, после чего образование таких солитонов прекращается, и основную роль начинают играть солитоны с большим числом плазмонов.

Предположим теперь, что основная часть плазмонов с $k \leq \tilde{k} \ll 1$ благодаря самозахвату перешла в связанные состояния, а плазмоны с $k > \tilde{k}$ остались свободными. Тогда согласно формуле (11.7) для рассматриваемой системы наиболее типичны солитоны с

$$N \sim \tilde{k}^3 g^{-2}. \quad (11.10)$$

Характерное расстояние L_N между такими солитонами определяется полным числом плазмонов с $k \leq \tilde{k}$ в исходном спектре и равно

$$L_N \sim N / (\tilde{k} W_0). \quad (11.11)$$

При $N \gg W_0$ это расстояние существенно превышает размер области формирования солитона \tilde{k}^{-1} . Отсюда видно, что при обогащении спектра плазмонами с $k \leq \tilde{k}$ в промежутках между име-

ющимися солитонами могли бы сформироваться новые солитоны с тем же значением N .

Согласно формулам (11.9), (11.10) время захвата из первоначального спектра большинства волн с $k \leq \bar{k}$ возрастает с \bar{k} пропорционально $\exp(\bar{k}^3 / (g^2 W_0))$. Поэтому должно существовать некоторое пороговое значение \bar{k} , при котором процесс захвата становится столь медленным, что его скорость сравнивается со скоростью пополнения длинноволновой части спектра вследствие слаботурбулентной перекачки плазмонов. Перекачка может быть обусловлена распадным взаимодействием свободных плазмонов с ионным звуком и индуцированным рассеянием плазмонов на электронах. С ростом уровня возмущений плотности первый из этих двух механизмов частично подавляется [34, 55] (см. § 12). Что же касается рассеяния на электронах, то оно, напротив, ускоряется, поскольку появление неоднородностей плотности увеличивает разброс ленгмюровских волн по частотам, приближая тем самым фазовую скорость биений свободных и связанных волн к тепловой скорости электронов. Заметим, что рассеяние на электронах способно не только поставлять свободные плазмоны в длинноволновую область спектра, но и непосредственно «подпитывать» плазмонами уже сформировавшиеся солитоны.

Описанная здесь флюктуационная картина рождения солитонов не требует, как мы видели, перехода через порог модуляционной неустойчивости. Ясно, что определяющая роль флюктуаций сохраняется и в том случае, когда порог неустойчивости слегка превышен, но система находится в непосредственной близости от него. Если же надпороговость ϵ удовлетворяет условию *

$$\epsilon > g^{1/3}, \quad (11.12)$$

то источником солитонов становится модуляционная неустойчивость, поскольку в этом случае время ее развития меньше времени формирования солитонов с $N \sim 1$ путем самозахвата.

Обсуждая флюктуационное рождение солитонов, мы ограничились здесь случаем свободной турбулентности, т. е. пренебрегли накачкой и затуханием волн. В присутствии накачки ситуация может существенно измениться, поскольку открывается новая возможность попадания плазмонов в связанное состояние: прямое возбуждение волн в областях пониженной плотности плазмы. Этот механизм лежит в основе так называемого *процесса нуклеации*, рассмотренного в [56].

* Параметр ϵ представляет собой относительное превышение интенсивности волн над пороговым уровнем.

12. Генерация ионного звука самолокализованными плазмонами *

Локализованные состояния плазмонов, рассмотренные выше, характеризовались тем, что глубины соответствующих потенциальных ям сопоставимы с кинетической энергией плазмонов. Однако известно, что для квазичастиц, описываемых одномерным уравнением Шредингера, локализация может иметь место и при существенно меньших перепадах потенциала [57], т. е. в ситуации, где по грубой оценке применима теория возмущений. В этом случае поведение плазмонов должно, на первый взгляд, описываться моделью слабой турбулентности. Но в действительности картина несколько иная, причем существенную роль здесь, как и в ранее рассмотренных задачах, играет параметр адиабатичности. Покажем это на примере задачи о генерации плазмонами ионного звука. Соответствующие оценки для наглядности будут проведены в размерных переменных.

Предположим, что характерное волновое число плазмонов k удовлетворяет условию

$$kr_D \gg \sqrt{m/M}, \quad (12.1)$$

причем разброс плазмонов по волновым числам оценочно равен k . Тогда в элементарном акте индуцированного излучения звука каждый плазмон взаимодействует лишь со своими ближайшими соседями по частотному спектру. Зазор между ними равен частоте звука ω_s . Если под влиянием какого-либо возмущения частоты взаимодействующих плазмонов расходятся более чем на ω_s , то скорость генерации звука падает. В роли такого возмущения могут, в частности, выступать и сами звуковые волны, накапливающиеся в системе. Заметим, что соответствующее расщепление частот плазмонов может, в свою очередь, быть очень малым по сравнению с полной шириной их спектра.

Обсуждаемый эффект тесно связан с локализацией плазмонов в случайном поле звуковых возмущений **. В одномерной задаче длину локализации плазмона l_k можно оценить по теории возмущений как длину его свободного пробега в поле случайных неоднородностей плотности. Считая характерный пространственный масштаб неоднородностей сопоставимым с длиной волны плазмона, получаем

$$l_k^{-1} \sim k \langle [\delta n / (n_0 k^2 r_D^2)]^2 \rangle, \quad (12.2)$$

* Содержание этого параграфа основано на работе [55].

** Другие интересные последствия локализации плазмонов обсуждаются в [58].

где угловые скобки означают усреднение по пространству. Оценка (12.2) справедлива до тех пор, пока «потенциальная энергия» плазмона, равная $(\omega_p/2)\delta n/n_0$, остается малой по сравнению с его «кинетической энергией», равной $(3/2)\omega_p k^2 r_D^2$; отсюда, в частности, видно, что $kl_h \geq 1$. На границе применимости этой оценки длина локализации сравнивается с характерной длиной волны, что качественно напоминает картину локализации плазмонов в солитоне.

Допустим теперь, что в плазме выбран некоторый промежуток шириной порядка l_h . Характерное расстояние $\Delta\omega_k$ между соседними уровнями энергии плазмонов, локализованных на этом промежутке, можно оценить как

$$\Delta\omega_k \sim \omega_p k r_D^2 / l_h.$$

С учетом соображений, высказанных в начале параграфа, мы рассмотрим здесь ситуацию, когда $\Delta\omega_k$ значительно превышает характерную частоту звука kc_s . Взаимодействие плазмонов, приводящее к излучению звука, требует в этом режиме сближения соседних уровней до расстояния $\delta\omega_k$, существенно меньшего, чем $\Delta\omega_k$. Процесс излучения можно, следовательно, описать в терминах последовательных «столкновений» энергетических уровней (рис. 14). Эти столкновения обусловлены нестационарностью возмущений плотности плазмы. Чтобы оценить интенсивность излучения, введем в рассмотрение величину δt — длительность отдельного столкновения. Относительно δt предполагается, что $kc_s < 1/(\delta t) < \Delta\omega_k$. Левое из этих неравенств означает, что в масштабе звукового времени столкновение уровней представляет собой короткий толчок, а правое — что время δt достаточно велико для того, чтобы соотношение неопределенности $\delta\omega_k \delta t \sim 1$ позволяло с хорошей точностью различать уровни в масштабе $\Delta\omega_k$.

При столкновении двух уровней ponderomotorная сила создает возмущение скорости ионов δv , равное

$$\delta v \sim \frac{1}{16\pi M n_0} \frac{\partial}{\partial x} \int (E_k E_{\tilde{k}}^* + E_k^* E_{\tilde{k}}) dt,$$

где E_k и $E_{\tilde{k}}$ — адиабатические волновые функции взаимодействующих плазмонов. Эта формула позволяет написать для плотности энергии звука δW_s , излучаемого в отдельном столкновении, следующую оценку:

$$\delta W_s \sim \frac{k^2 |E_k|^2 |E_{\tilde{k}}|^2}{(16\pi)^2 M n_0} (\delta t)^2. \quad (12.3)$$

Если принять, что частотная ширина спектра плазмонов оценочно равна $\omega_p k^2 r_D^2$ и выразить здесь величины $|E_k|^2$ и $|E_{\tilde{k}}|^2$ через

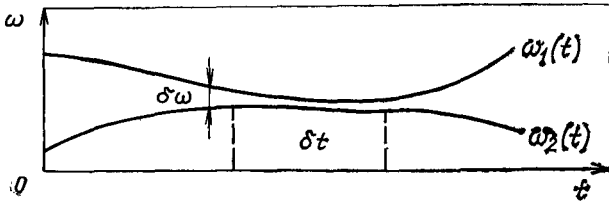


Рис. 14. «Столкновение» энергетических уровней плазмонов в нестационарном потенциале

среднюю по пространству плотность энергии плазмонов W , то оценка (12.3) дает

$$\delta W_s \sim \frac{k^2 W^2}{M n_0} \left(\frac{\Delta \omega_k}{\omega_p k^2 r_D^2} \delta t \right)^2.$$

Домножив δW_s на число состояний, приходящихся на длину локализации l_h , и на частоту столкновений уровней ν , получим в итоге следующее выражение для мощности излучения, генерируемого в единице объема:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_s \sim \frac{k^2 W^2}{M n_0} \frac{\Delta \omega_k}{\omega_p k^2 r_D^2} (\delta t)^2 \nu. \quad (12.4)$$

Входящая сюда частота столкновений уровней ν должна в рассматриваемой ситуации оцениваться по характерной частоте звука $k c_s$, поскольку это единственный временной масштаб, характеризующий нестационарность профиля плотности.

Чтобы оценить время отдельного столкновения δt , необходимо знать вероятность $P(\Delta \omega_k; \delta t)$ сближения уровней на расстояние $(\delta t)^{-1}$ при среднем расстоянии между уровнями $\Delta \omega_k$. Положим здесь

$$P(\Delta \omega_k; \delta t) \sim [1/(\Delta \omega_k \delta t)]^p, \quad (12.5)$$

где показатель степени p характеризует расталкивание уровней. В отсутствие расталкивания этот показатель равен единице; при наличии расталкивания $p > 1$. В связи с трудностями, возникающими при попытке самосогласованного отыскания вероятности $P(\Delta \omega_k; \delta t)$, мы вынуждены в данном случае ограничиться заданием модельного выражения, содержащего свободный параметр p . Это, разумеется, вносит в конечный результат известную неопределенность. Однако несмотря на присущий ему произвол такой подход обладает тем достоинством, что он позволяет выявить связь обсуждаемых эффектов с расталкиванием уровней.

По смыслу величин δt и ν вероятность P совпадает с произведением $\nu \delta t$. Отсюда видно, что

$$\delta t \sim \nu^{-1/(p+1)} (\Delta \omega_k)^{-p/(p+1)} \sim (k c_s)^{-1/(p+1)} (\Delta \omega_k)^{-p/(p+1)}.$$

Подстановка в формулу (12.4) явных выражений для δt , $\Delta\omega_k$ и ν дает окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} W_s \sim \frac{W^2}{M n_0 \omega_p r_D^2} \left(\frac{n_0 T}{W_s} k^3 r_D^3 \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^{\frac{p-1}{p+1}}. \quad (12.6)$$

Здесь учтено, что среднеквадратический уровень возмущений плотности ионов связан с плотностью энергии звука соотношением $n_0 T \langle (\delta n/n_0)^2 \rangle \sim W_s$.

Выражение (12.6) для мощности излучения содержит по сравнению со стандартной оценкой, получающейся в приближении слабой турбулентности, дополнительный множитель $\mu^{(p-1)/(p+1)}$, где $\mu \equiv (n_0 T / W_s) k^3 r_D^3 (m/M)^{1/2}$, причем в обсуждаемом нами режиме $\mu \leq 1$. При наличии расталкивания уровней этот множитель делает мощность излучения убывающей функцией интенсивности накопленного в системе звука.

Заметим, что вместе со скоростью генерации звука меняется также характерное время спектральной перекачки плазмонов τ . Оценку этого времени можно получить из формулы (12.6), положив в ней

$$W_s \sim W k^2 r_D^2, \quad (12.7)$$

поскольку относительное уменьшение энергии плазмона в процессе перекачки оценочно равно $k^2 r_D^2$. При этом

$$\tau \sim \frac{M}{m} \frac{n_0 T k^2 r_D^2}{\omega_p W} \left(\frac{W}{n_0 T k r_D} \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^{\frac{p-1}{p+1}}.$$

Соотношение (12.7) позволяет выразить параметр μ через плотность энергии плазмонов

$$\mu = \left(\frac{W}{n_0 T k r_D} \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^{-1}.$$

Условие $\mu \leq 1$ в данном случае означает, что влияние локализации сверхзвуковых плазмонов на их спектральную перекачку становится существенным при $W \sim n_0 T k r_D (m/M)^{1/2}$, т. е. раньше, чем плотность энергии плазмонов достигает значения $W \sim \sim n_0 T k^2 r_D^2$, соответствующего порогу модуляционной неустойчивости.

Приложение 1

Вычисление S_1 . При $m=1$ преобразование Лапласа

$$\epsilon(\omega) = \int_0^{\infty} \epsilon_x(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad (\text{П1.1})$$

переводит уравнение (8.20) в дифференциальное уравнение первого порядка для $\varepsilon(\omega)$:

$$\varepsilon - \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon = \frac{i}{\omega - \kappa^2}. \quad (\text{П1.2})$$

Здесь все функции определены в верхней полуплоскости комплексной переменной ω ($0 < \arg \omega < \pi$), так что $\operatorname{Re} \sqrt{\omega} > 0$. Решение уравнения (П1.2) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{i}{\omega - \kappa^2} - \exp\left(\frac{4}{3} \omega^{3/2}\right) \int_{\omega}^{\infty} \frac{i}{(\omega_1 - \kappa^2)^2} \exp\left(-\frac{4}{3} \omega_1^{3/2}\right) d\omega_1, \quad (\text{П1.3})$$

где интегрирование ведется по любому контуру, расположенному в верхней полуплоскости и уходящему в бесконечность вдоль вещественной оси, чем обеспечивается убывание подынтегрального выражения при $\omega_1 \rightarrow \infty$ и выполнение начального условия для функции $\varepsilon_{\kappa}(\tau)$:

$$\varepsilon_{\kappa}(\tau) = \begin{cases} 1; & \tau = +0; \\ 0; & \tau = -0. \end{cases} \quad (\text{П1.4})$$

Восстановив по функции $\varepsilon(\omega)$ функцию $\varepsilon_{\kappa}(\tau)$, получаем

$$\varepsilon_{\kappa}(\tau) = \exp(-i\kappa^2\tau) - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \exp\left(-i\omega\tau + \frac{4}{3} \omega^{3/2}\right) d\omega \int_{\omega}^{+\infty+i0} \frac{\exp\left[-(4/3)\omega_1^{3/2}\right]}{(\omega_1 - \kappa^2)^2} d\omega_1. \quad (\text{П1.5})$$

Для определения коэффициента C_1 здесь достаточно удержать только второе слагаемое. Его асимптотика при $\tau \rightarrow \infty$ определяется точкой перевала, расположенной при больших отрицательных значениях ω ($\omega = -\tau^2/4$). Это позволяет заменить в формуле (П1.5) нижний предел интегрирования по ω_1 на $-\infty$, после чего вычисление интеграла по ω методом перевала дает

$$\varepsilon_{\kappa}(\tau) \approx -\frac{1+i}{2(2\pi)^{1/2}} \tau^{1/2} \exp(i\tau^3/12) \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{\exp\left[-(4/3)\omega_1\right]^{3/2} d\omega_1}{(\omega_1 - \kappa^2)^2}. \quad (\text{П1.6})$$

Проинтегрировав обе части (П1.6) по κ , находим

$$\int \varepsilon_{\kappa}(\tau) d\kappa \approx (1-i)(\pi\tau/2)^{1/2} \exp(i\tau^3/12) \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \exp\left[-(4/3)\omega_1\right]^{3/2} d\omega_1.$$

Выполнив теперь интегрирование по ω_1 (см. [40]) и подставив результат в формулу (8.22), получаем в итоге для C_1 выражение (8.24).

Вычисление C_2 . При $m=2$ уравнение (8.20) переводится преобразованием (П1.1) в уравнение второго порядка

$$\varepsilon + \frac{i}{2\sqrt{\omega}} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \varepsilon = \frac{i}{\omega - \kappa^2}. \quad (\text{П1.7})$$

Замены независимой переменной

$$z = \frac{4}{5} (1 - i)\omega^{5/4} \quad (\text{П1.8})$$

и неизвестной функции $f = \varepsilon/\omega^{1/2}$ сводят уравнение (П1.7) к неоднородному уравнению Бесселя, решение которого удобно выразить через функции Ганкеля $H_{2/5}^{(1)}$ и $H_{2/5}^{(2)}$.

Получающееся в итоге выражение для ε имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{i}{\omega - \kappa^2} + \frac{2\pi}{5} \omega^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z) \int_{-\infty+i0}^{\omega} \frac{\omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(1)}(z_1)}{(\omega_1 - \kappa^2)^3} d\omega_1 + \\ & + \frac{2\pi}{5} \omega^{1/2} H_{2/5}^{(1)}(z) \int_{\omega}^{+\infty+i0} \frac{\omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z)}{(\omega_1 - \kappa^2)^3} d\omega_1. \end{aligned} \quad (\text{П1.9})$$

Так же как и в формуле (П1.3), интегралы здесь берутся по контурам, лежащим в верхней полуплоскости переменной ω_1 и уходящим в бесконечность вдоль вещественной оси. Этим достигается выполнение начального условия (П1.4).

Исследование выражения (П1.9) показывает, что при отыскании асимптотики функции $\varepsilon_{\kappa}(\tau)$ в формуле (П1.9) достаточно удержать лишь последнее слагаемое, поскольку, так же как и в случае $m=1$, асимптотика $\varepsilon_{\kappa}(\tau)$ определяется поведением ε при больших отрицательных значениях ω . Используя асимптотическое выражение для функции $H_{2/5}^{(1)}(z)$

$$H_{2/5}^{(1)}(z) = (2/\pi)^{1/2} (1/z)^{1/2} \exp[i(z - 9\pi/20)]$$

(см. [41]) и заменяя нижний предел интегрирования по ω_1 на $-\infty$, получаем, что для интересующих нас частот

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\pi^{1/2} (2/25)^{1/4}}{\omega^{1/8}} \exp\left[\frac{4}{5}(1+i)\omega^{5/4} - 13\pi i/40\right] \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{\omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z_1) d\omega_1}{(\omega_1 - \kappa^2)^3}.$$

При переходе от $\varepsilon(\omega)$ к $\varepsilon_{\kappa}(\tau)$ интеграл по ω может быть вычислен методом перевала (точка перевала лежит при $\omega = -\tau^4/4$). Результат вычисления имеет вид

$$\varepsilon_{\kappa}(\tau) \approx \frac{\tau}{5^{1/2}} \exp(i\tau^5/20 - i7\pi/10) \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{\omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z_1) d\omega_1}{(\omega_1 - \kappa^2)^3}.$$

Интегрирование этого выражения по κ дает

$$\int \varepsilon_{\kappa}(\tau) d\kappa = \frac{\pi\tau}{5^{1/2}} \exp(i\tau^5/20 - i7\pi/10) \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z_1) d\omega_1.$$

Вычисление здесь интеграла по ω_1 (см. [40]) (при интегрировании удобно перейти от ω_1 к переменной z_1 (см. (П1.8)) и подстановка результата в формулу (8.22) дают в итоге для C_2 формулу (8.23).

Приложение 2

Чтобы построить решения уравнения (10.5), введем, следуя схеме Шабата [48, 49], вспомогательное интегральное уравнение

$$K(x; y; t) = F(x; y; t) + \int_x^{\infty} K(x; s; t)F(s; y; t)ds, \quad (\text{П2.1})$$

которое в сокращенной записи имеет вид

$$K = F + K * F,$$

и рассмотрим пару дифференциальных операторов:

$$D_1 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}; \quad D_2 = \frac{3^{1/2}}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Каждому из операторов D_i ($i=1, 2$) соответствует «одетый» оператор \tilde{D}_i , определенный таким образом,

$$\tilde{D}_i K = D_i F + \tilde{D}_i K * F + K * D_i F. \quad (\text{П2.2})$$

Операторы \tilde{D}_i задаются следующими формулами [48]:

$$\tilde{D}_1 = D_1 - \frac{3}{4} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \frac{3}{2} w; \quad \tilde{D}_2 = D_2 - \frac{3^{1/2}}{2} u,$$

где

$$u = -2 \frac{d}{dx} K(x; x; t); \quad (\text{П2.3})$$

$$w = \frac{d}{dx} \left\{ K^2(x; x; t) + \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x; y; t) - \frac{\partial}{\partial y} K(x; y; t) \right]_{y=x} \right\}.$$

Соотношение (П2.2) показывает, что при соответствующих ограничениях на функции K и F уравнения $D_i F = 0$ и $\tilde{D}_i K = 0$ эквивалентны друг другу. Следовательно, если F удовлетворяет двум уравнениям

$$D_1 F = 0; \quad D_2 F = 0, \quad (\text{П2.4})$$

которые заведомо совместны, то K будет решением системы

$$\tilde{D}_1 K = 0; \quad \tilde{D}_2 K = 0. \quad (\text{П2.5})$$

Условие совместности этой системы сводится к уравнению (10.5). Таким образом, каждое решение интегрального уравнения (П2.1) с ядром F , удовлетворяющим условиям (П2.4), порождает некоторое решение уравнения (10.5).

Для исходной физической задачи представляют интерес периодические по x решения. Их можно получить путем предельного перехода из решений, соответствующих вырожденному ядру F , убывающему при $x \rightarrow \infty$.

Рассмотрим вырожденное ядро:

$$F(x; y; t) = \sum_n f_n(x; t) \zeta_n(y; t). \quad (\text{П2.6})$$

Подставив его в уравнения (П2.4), найдем функции f_n и φ_n

$$\left. \begin{aligned} f_n &= a_n \exp \left[i k_{nx} x + \frac{3^{1/2}}{2} k_{nx}^2 t + i \theta_n \right]; \\ \varphi_n &= \exp [i k_{ny} y - (3^{1/2}/2) k_{ny}^2 t]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.7})$$

Здесь a_n и θ_n — произвольные вещественные постоянные, k_{nx} и k_{ny} — комплексные числа, связанные соотношением

$$k_{nx}^2 - k_{nx} k_{ny} + k_{ny}^2 = 1. \quad (\text{П2.8})$$

Относительно k_{nx} и k_{ny} дополнительно предполагается, что

$$\text{Im } k_{nx} > 0, \text{Im } k_{ny} > 0. \quad (\text{П2.9})$$

Ядро F в дальнейшем считается составленным из пар комплексно сопряженных слагаемых $f_n \varphi_n + f_n^* \varphi_n^*$, так что оно автоматически оказывается вещественным.

Для ядра (П2.6) решение интегрального уравнения (П2.1) записывается в следующем виде:

$$K(x; y; t) = \sum_n \psi_n(x; t) \varphi_n(y; t),$$

где функции ψ_n определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_m A_{mn} \psi_m = f_n; \quad A_{mn} = \delta_{nm} - \int_x^\infty f_m(s; t) \varphi_n(s; t) ds. \quad (\text{П2.10})$$

Решив эту систему и воспользовавшись затем соотношением (П2.3), можно получить следующее выражение для $u(x; t)$ (см., например, [50]):

$$u = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Lambda, \quad (\text{П2.11})$$

где

$$\Lambda = \det A_{mn}. \quad (\text{П2.12})$$

В области своей регулярности функция $u(x; t)$, определенная формулами (П2.11) и (П2.12), с необходимостью удовлетворяет уравнению (10.5).

Устремим теперь мнимые части чисел k_{nx} и k_{ny} к нулю, считая дополнительно, что ни одна из величин $k_{nx} + k_{ny}$ в нуль не обращается. Функция Λ , которая получается в результате такого предельного перехода, регулярна на всей оси x и не убывает при $x \rightarrow \pm \infty$. В простейшем случае, когда сумма (П2.6) состоит всего из двух комплексно сопряженных слагаемых, Λ задается следующей формулой:

$$\Lambda = 1 - 2 \frac{a}{k} \exp \left(\frac{3^{1/2}}{2} k x t \right) \cos(kx + \theta) + \frac{a^2}{k^2} \left(1 - \frac{k^2}{x^2} \right) \exp(3^{1/2} k x t). \quad (\text{П2.13})$$

Здесь $k^2 + 3x^2 = 4$, а константы a и θ произвольны. Подстановка Λ в формулу (П2.11) дает решение (10.6).

Список литературы

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.// Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82—100.
2. Drummond W. E., Pines D.// Nucl Fus., Suppl. 1962. Vol. 3. P. 1049—1058.
3. Веденов А. А.// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 203—244.
4. Кадомцев Б. Б.// Там же. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 188—339.
5. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.// Там же. 1973. Вып. 7. С. 3—145.
6. Пустовалов В. В., Силин В. П.// Тр. Физ. ин-та АН СССР. 1972. Т. 61. С. 41—281.
7. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М.: Наука, 1967.
8. Веденов А. А., Рудаков Л. И.// Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. С. 767—770.
9. Захаров В. Е.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1972. Т. 62. С. 1745—1759.
10. Захаров В. Е.// Основы физики плазмы: Сб. статей/ Под ред. А. А. Галева и Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. Т. 2. С. 79—118.
11. Шапиро В. Д., Шевченко В. И.// Там же. С. 119—174.
12. Горев В. В., Кингсеп А. С., Рудаков Л. И.// Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. С. 691—720.
13. Rudakov L. I., Tsytoovich V. N.// Phys. Reports. 1978. Vol. 40. P. 1—73.
14. Thornhill S. G., Ter Haar D.// Ibid. 1978. Vol. 43. P. 43—99.
15. Литвак А. Г.// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1980. Вып. 10. С. 164—244.
16. Шафранов В. Д.// Там же. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 3—140.
17. Гапонов А. В., Миллер М. А.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1958. Т. 34. С. 242—243.
18. Кузнецов Е. А.// Там же. 1974. Т. 66. С. 2037—2047.
19. Gibbons J., Thornhill S. G., Wardrop M. J., Ter Haar D.// J. Plasma Phys. 1977. Vol. 17. P. 153—170.
20. Захаров В. Е., Шабат А. Б.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1971. Т. 61. С. 118—134.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
22. Vedepov A. A., Gordeev A. V., Rudakov L. I.// Plasma Phys. 1967. Vol. 9. P. 719—735.
23. Астрелин В. Т., Брейзман Б. Н., Седлачек З., Юнгвирт К.// Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 706—715.
24. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
25. Теория солитонов: Метод обратной задачи/ В. Е. Захаров, С. В. Манакон, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский/ Под ред. С. П. Новикова, М.: Наука, 1980.
26. Захаров В. Е., Щур Л. Н.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1981. Т. 81. С. 2019—2031.
27. Breizman V. N.// Journal de Physique. Colloque C7, supplement au Vol. 40, № 7. 1979. P. 7—563.
28. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1977. Т. 73. С. 1352—1369.
29. Захаров В. Е., Мастрюков А. Ф., Сынах В. С.// Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 614—622.
30. Малкин В. М.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1984. Т. 87. С. 433—449.
31. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И.// Физика плазмы. 1976. Т. 2. С. 438—449.
32. Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д.// Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 23—28.

33. Малкин В. М., Цидулко Ю. А.// Физика плазмы. 1985. Т. 11. С. 964—970.
34. Брейзман Б. Н., Седлачек З., Юнгвирт К./ Препринт ИЯФ СО АН СССР № 87—154. Новосибирск, 1987.
35. Дегтярев Л. М., Маханьков В. Г., Рудаков Л. И.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1974. Т. 67. С. 533—542.
36. Чукбар К. В., Яньков В. В.// Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 1398—1400.
37. Курин В. В., Фрайман Г. М.// Физика плазмы. 1981. Т. 7. С. 716—725.
38. Lebedev A. N., Tsytovich V. N.// Physica Scripta. 1975. Vol. 11. P. 266—268.
39. Астрелин В. Т., Брейзман Б. Н., Васильев В. В. и др.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1986. Т. 91. С. 2039—2052.
40. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
41. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
42. Дегтярев Л. М., Сагдеев Р. З., Соловьев Г. И. и др.// Физика плазмы. 1980. Т. 6. С. 485—508.
43. Ichikawa Y. H., Suzuki T., Taniuti T.// J. Phys. Soc. Japan. 1973. Vol. 34. P. 1089—1092.
44. Малкин В. М.// Физика плазмы. 1982. Т. 8. С. 357—364.
45. Брейзман Б. Н., Малкин В. М.// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1980. Т. 79. С. 857—869.
46. Pozzoli R., Ryutov D. D.// Phys. Fluids. 1979. Vol. 22. P. 1782—1789.
47. Брейзман Б. Н., Пеккер М. С., Розенраух Ю. М.// Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 836—844.
48. Захаров В. Е., Шабат А. Б.// Функциональный анализ. 1974. Т. 8. С. 54—62.
49. Шабат А. Б.// Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. С. 1310—1313.
50. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. Гл. 5.
51. Брейзман Б. Н., Малкин В. М.// Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 288—299.
52. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1965.
53. Pereira N. R., Sudan R. N., Denavit J.// Phys. Fluids. 1977. Vol. 20. P. 936—945.
54. Sedlacek Z., Jungwirth K., Stavinoha P., Breizman B. N.// 12 Europ. Conf. on Control. Fus. and Plasma Phys. Budapest, 1985. Vol. 2. P. 338—341.
55. Брейзман Б. Н., Юнгвирт К. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 88—1. Новосибирск; Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 1504—1507.
56. Doolen G. D., DuBois D. F., Rose H. A.// Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 804—807.
57. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
58. Escande D. F., Souillard B.// Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 1296—1299.

ПРИСТЕНОЧНАЯ ПЛАЗМА В ТОКАМАКАХ*А. В. Недоспасов, М. З. Токарь*

Введение

На протяжении всей истории работ по магнитному удержанию горячей плазмы одной из главных задач экспериментаторов была борьба с поступлением примесей.

Первые успехи в этой деятельности на токамаках и стеллараторах были связаны с использованием методов прогрева стенок в вакууме и введением специальных лимитеров (диафрагм), ограничивающих поперечный размер плазменного шнура. Подвергаясь сильному и сосредоточенному воздействию плазмы, лимитер существенно уменьшает попадание заряженных частиц на основные стенки камеры.

Следующими шагами явились способы очистки поверхностей специальными индукционными или тлеющими разрядами, а также замена диафрагм из тугоплавких металлов графитовыми, так как плазма менее чувствительна к примесям с меньшим атомным номером.

Дальнейший прогресс был обусловлен применением диверторных конфигураций магнитного поля. В них в некотором слое вблизи первой стенки, получившем название *scrape-off layer* (SOL) силовые линии выводятся «наружу», на специальные диверторные пластины, по возможности максимально удаленные от основной плазмы. Эксперименты с диверторами подтвердили, что эти устройства эффективно повышают чистоту плазмы.

В термоядерном реакторе степень чистоты можно характеризовать тем, насколько содержание в плазме той или иной примеси мало по сравнению с предельной ее концентрацией, при которой самоподдерживающаяся реакция синтеза становится невозможной из-за радиационных потерь энергии. Зависимость предельных («летальных») концентраций ряда примесей от температуры плазмы показаны на рис. 1. Так как предполагается, что в первых реакторных установках температура составит 10—15 кэВ, содержание в них легких примесей не должно превышать нескольких процентов, а металлических — долей процента.

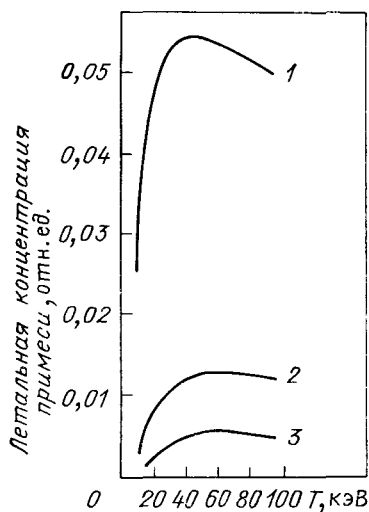


Рис. 1. Зависимость летальной для термоядерного горения концентрации неона (1), железа (2) и молибдена (3) от температуры плазмы

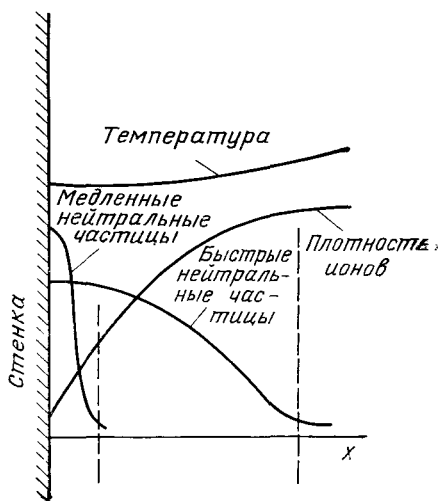
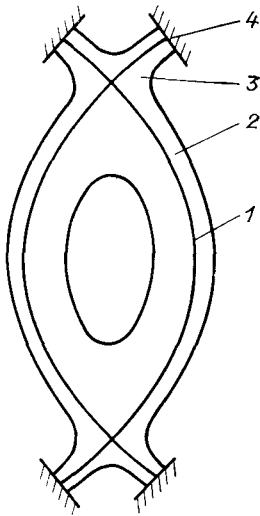


Рис. 2. Качественная картина пристеночной области [2]

В современных крупных токамаках уже достигается достаточная для получения термоядерного горения чистота плазмы. Однако проблема взаимодействия горячей плазмы со стенками становится все острее из-за увеличения длительности разрядных импульсов и применения мощных дополнительных источников нагрева плазмы. В экспериментальном реакторе с квазистационарным горением воздействие на стенки возрастает многократно по длительности и интенсивности по сравнению с уровнем сегодняшнего дня. Поэтому желательно, чтобы теоретические исследования пристеночной плазмы не только объяснили имеющиеся экспериментальные данные, но и служили бы достаточно надежной базой для проектов установок следующего поколения.

Явления вблизи материальных поверхностей начали обсуждаться уже в первых (1951 г.) работах по теории магнитного термоядерного реактора [1—3]. Качественная картина процессов вблизи стенок показана на рис. 2. Образовавшиеся при поверхностной рекомбинации плазмы медленные атомы водорода перезаряжаются на ионах. Ионизация возникающих при этом быстрых нейтралов электронами приводит к появлению заряженных частиц, которые вновь уходят на стенку. В результате в пристеночной области возникает кругооборот вещества, названный позднее *рециклингом*.

Рис. 3. Сечение магнитных поверхностей в токамаке с полоидальным дивертором: 1 — сепаратриса; 2 — SOL; 3 — диверторный объем; 4 — пластина



Непосредственно материальной поверхности тепловой поток, поступающий из центральных областей разряда, передается частицами. Тогда, чем интенсивнее рециклинг, т. е. больше поток плазмы на стенку, тем ниже энергия взаимодействующих с ней частиц и меньше эрозия. В [3] было показано, что при плотности потока тепла в пристеночную область 10 Вт/см^2 , плотности плазмы на ее границе $n_w = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и классическом характере процессов переноса поперек магнитного поля температура плазмы вблизи стенки со-

ставит 10 эВ. В то время предполагалось, что столь высокое значение n_w , на порядок превышающее плотность в центре реактора, будет поддерживаться благодаря термодиффузии.

Количественной характеристикой (коэффициентом) рециклинга может служить отношение потоков плазмы на стенку и из центральной области разряда. В [3] этот коэффициент был бесконечно большим. В другом предельном случае слабого рециклинга, когда коэффициент близок к единице, температура плазмы, контактирующей с поверхностью, составит несколько килоэлектрон-вольт и неизбежно возникнет труднопреодолимая проблема эрозии стенок. Поэтому режимы с сильным рециклингом представляются наиболее предпочтительными для реактора и им в обзоре уделяется особое внимание. Рассматриваются ситуации с рециклингом на стенке, параллельной магнитному полю, на пластинах полоидального дивертора (рис. 3), на лимитере. В последнем случае в пристеночной области выделяется SOL и *периферийная* область с замкнутыми магнитными поверхностями, в которой существенна роль нейтралов, возникающих при рециклинге.

Изучение поведения примесей на периферии разряда является важной задачей физики пристеночной плазмы. С одной стороны, потоками частиц на стенке, их энергиями, характером процессов переноса в пристеночной области определяется интенсивность поступления примесей в центр токамака. С другой стороны, излучение примесей, особенно легких, с богатыми линей-

чатými спектрами, может сильно влиять на энергетический баланс пристеночной плазмы. В обзоре рассмотрен ряд моделей описания транспорта примесных частиц, исследуется их роль в формировании состояний с излучающей периферией, в существовании предела по плотности плазмы.

Возрастающий в последнее время интерес к исследованиям природы процессов переноса в пристеночной плазме обусловлен рядом причин. Поперечной диффузией и теплопроводностью определяется интенсивность рециклинга и температура периферийной плазмы, плотность теплового потока на пластины диверторов и лимитеров. Отмечена связь этих процессов с различными режимами удержания энергии в основной плазме. В обзоре приведена теория конвективного и турбулентного переносов частиц и тепла в SOL токамаков с полоидальными лимитерами, связанных со спецификой условий протекания токов равновесия.

Обзор не охватывает всего круга явлений, известных в пристеночной плазме токамаков. Это относится, в частности, к электродуговым разрядам на стенках, по которым имеется большой экспериментальный материал, но нет последовательной теории; к взаимодействию плазма — стенка на начальной и конечной стадиях разряда, при срывах тока; т. д. Физика пристеночной плазмы еще не завершена и будущие исследования, без сомнения, обогатят ее новыми явлениями и теоретическими моделями.

Глава 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ ПРИСТЕНОЧНОЙ ОБЛАСТИ

1.1. Гидродинамическое приближение для плазмы

Уравнение переноса. Для пристеночной плазмы современных токамаков и будущих реакторов, как правило, характерны условия, при которых длины пробега ионов и электронов до кулоновских столкновений λ_c и их ларморовские радиусы малы по сравнению с размерами изменения параметров соответственно вдоль и поперек магнитного поля, $L_{\parallel, \perp}$. В этом случае для описания заряженных компонентов плазмы может быть использована система уравнений гидродинамики [4], дополненных объемными источниками и стоками частиц, импульса и энергии, которые обусловлены взаимодействием с нейтралами, возникающими при рециклинге на материальных поверхностях, а также неводородными примесями в процессах ионизации, диссоциации, перезарядки, возбуждения.

Толщина пристеночной области мала по сравнению с радиусом плазменного шнура a . Поэтому геометрия области принимается плоской и все магнитные поверхности параллельны первой стенке. В первых пяти главах из процессов переноса в тордиальном и полоидальном направлениях учитываются только течение и теплопроводность плазмы вдоль силовых линий, а поперек магнитных поверхностей — аномальные диффузия и теплопроводность ионов и электронов с коэффициентами D_{\perp} , $\kappa^{i,e}_{\perp}$, значительно превышающими классические. Протеканием тока и связанным с ним джоулевым тепловыделением пренебрегается ввиду низкой проводимости пристеночной плазмы.

В рамках сделанных допущений уравнения непрерывности, движения вдоль магнитного поля и теплового баланса плазмы в целом имеют вид:

$$\partial n / \partial t + \partial \Gamma_{\perp} / \partial x + \partial n V_{\parallel} / \partial l = S_n; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i n V_{\parallel}) + \frac{\partial}{\partial x} (m_i \Gamma_{\perp} V_{\parallel}) + \frac{\partial}{\partial l} (P_e + \Pi_i) = R_n; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} P_e + \frac{3}{2} P_i + n \varepsilon_{\parallel} \right) + \frac{\partial q_{\perp}}{\partial x} + \frac{\partial q_{\parallel}}{\partial l} = -Q_n - Q_l. \quad (1.3)$$

Здесь l — координата вдоль силовых линий; x — координата, перпендикулярная магнитным поверхностям (далее принимается, что положительным x соответствует периферийная область разряда с замкнутыми поверхностями, отрицательным — SOL); n — плотность плазмы; $T_{i,e}$ — температуры ионов и электронов; V_{\parallel} — скорость течения плазмы вдоль поля;

$$P_{i,e} = n T_{i,e}; \quad \Pi_i = P_i + 2\varepsilon_{\parallel} n; \quad \varepsilon_{\parallel} = m_i V_{\parallel}^2 / 2; \quad \Gamma_{\perp} = -D_{\perp} \partial n / \partial x;$$

$$q_{\perp} = (5/2) \Gamma_{\perp} (T_e + T_i) - \kappa_{\perp}^e \partial T_e / \partial x - \kappa_{\perp}^i \partial T_i / \partial x;$$

в продольном тепловом потоке учитываются конвекция и теплопроводность более подвижных электронов

$$q_{\parallel} = n V_{\parallel} \{ \varepsilon_{\parallel} + (5/2) (T_i + T_e) \} - \kappa_{\parallel}^e \partial T_e / \partial l; \quad \kappa_{\parallel}^e = 3,16 n T_e \tau_e / m_e.$$

Фигурирующие в правых частях S_n , R_n , Q_n описывают взаимодействие заряженных частиц с нейтралами водорода; Q_l — потери энергии электронами на возбуждение примесей.

Далее часто используется приближение изотермической плазмы; $T_i \approx T_e = T$; условия его применимости оговариваются.

Граничные условия. В зависимости от рассматриваемой конфигурации материальных поверхностей, ограничивающих плазму, граничные условия уравнений (1.1) — (1.3) выбираются из совокупности условий: на поверхности лимитера или дивертор-

ной пластины ($l=L_s$); в плоскости симметрии SOL вдоль магнитного поля ($l=0$); на поверхности первой стенки ($x=x_w$); на магнитной поверхности, касающейся лимитера, или сепаратрисе ($x=0$); на условной границе пристеночной и полностью ионизованной областей ($x=x_0$).

При контакте плазмы с изолированной проводящей поверхностью между ними устанавливается разность электрического потенциала φ_e , обеспечивающая равенство полного тока нулю. При отсутствии эмиссии электронов с поверхности [5]

$$\varphi_s = \frac{T_e}{2} \ln \left\{ \frac{m_i T_e}{2\pi m_e (T_e + T_i)} \right\}. \quad (1.4)$$

Разность потенциала сосредоточена в слое толщиной порядка дебаевского радиуса, который в пристеночной плазме мал по сравнению с λ_c . Из условия монотонности распределения потенциала в слое объемного заряда следует [6], что на его границе должно выполняться условие Бома:

$$V_{\parallel} \geq V_s, \text{ где } V_s = \sqrt{(T_e + T_i)/m_i} \text{ — скорость полного звука.}$$

Граница дебаевского слоя обычно отождествляется с границей области применимости гидродинамического приближения. Если на расстояниях от материальной поверхности, превышающих толщину дебаевского слоя, течение плазмы дозвуковое, из условия Бома следует:

$$V_{\parallel}|_{l=L_s} = V_s. \quad (1.5)$$

В [7] область, переходная между гидродинамической и слоем объемного заряда, рассмотрена на основе введения априорно заданных функций распределения по скоростям ионов и электронов. Из непрерывности моментов функций распределения получено граничное условие, предполагающее возможность

$$V_{\parallel}|_{l=L_s} < V_s.$$

Более детальное рассмотрение переходной области проведено в [8, 9], где из решения кинетических уравнений с учетом столкновений заряженных частиц показано, что (1.5) является достаточно точным приближением к реальной ситуации. Далее условие (1.5) считается выполненным, за исключением § 3.6, где учитывается возможность перехода плазмы в сверхзвуковое течение вблизи пластин. При $l=L_s$ также имеет место условие конвективности потока тепла:

$$q_{\parallel} = \gamma_0 n V_{\parallel} (T_e + T_i)/2, \quad (1.6)$$

где $\gamma_0 = (2T_e + 2,5T_i + e\varphi_s)/(T_e + T_i)/2$.

Обобщение формул (1.4)–(1.6) на случай с электронной эмиссией с поверхности приведено в [5].

Из соображений симметрии следует:

$$V_{\parallel}|_{l=0} = \frac{\partial n}{\partial l} \Big|_{l=0} = \frac{\partial T_e}{\partial l} \Big|_{l=0} = 0. \quad (1.7)$$

В [10] показано, что между плазмой и первой стенкой, на которую заряженные частицы диффундируют поперек магнитного поля, также устанавливается разность потенциала φ_s и выполняются условия:

$$q_{\perp}|_{x=x_w} = \gamma_0 \Gamma_{\perp} \frac{T_e + T_i}{2} \Big|_{x=x_w}; \quad (1.8)$$

$$\Gamma_{\perp}|_{x=x_w} = nV_w|_{x=x_w}, \quad (1.9a)$$

где V_w — скорость ухода частиц плазмы на поверхность в кинетической бесстолкновительной области. Как правило, V_w велика по сравнению с характерной скоростью диффузии в пристеночной области, и вместо (1.9a) часто можно использовать

$$n|_{x=x_w} = 0. \quad (1.9b)$$

При $x=x_0$ принимается

$$V_{\parallel}|_{x=x_0} = 0 \quad (1.10)$$

На условной границе пристеночной области заданы поток тепла из центра разряда

$$q_{\perp}|_{x=x_0} = q_0 \quad (1.11)$$

и плотность плазмы

$$n|_{x=x_0} = n_0. \quad (1.12)$$

Через процессы переноса в центральной части разряда n_0 связано со средней плотностью плазмы в токамаке \bar{n} . В разрядах с напуском газа $n_0 \approx 0,7 \div 0,8 \bar{n}$ [11]. При инжекции таблеток вглубь плазмы n_0 может быть значительно ниже \bar{n} .

1.2. Кинетическое описание плазмы

Бесстолкновительная плазма. В случае $\lambda_c \gg L_{\parallel}$, обратном рассмотренному выше, уравнения (1.1) — (1.3) не применимы и плазма SOL должна описываться на основе кинетического подхода [12, 13]. Поскольку столкновения между ионами отсутствуют, в области ионизации нейтралов, например вблизи нейтрализационной пластины дивертора или лимитера, в ионном компоненте целесообразно выделить две составляющие — *горячие* частицы, приходящие из основной плазмы, и *холодные*, появляющиеся при ионизации и перезарядке с нулевой энергией. Из-за высокой концентрации холодных ионов распределение электрического потенциала $\varphi(l)$ в области ионизации имеет максимум (рис. 4).

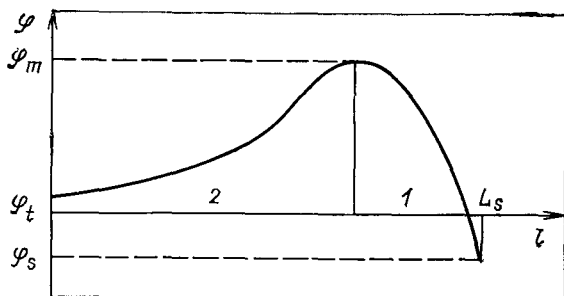


Рис. 4. Профиль электрического потенциала в бесстолкновительной плазме вблизи материальной поверхности при рециклинге холодных атомов

В [12] предполагается, что функция распределения горячих ионов вдали от поверхности близка к максвелловской. В этом случае их плотность в области ионизации и поток на материальную поверхность даются соотношениями:

$$\begin{aligned}
 n_H &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} A' e^{-\Psi(t)} \int_{-\infty}^{\sqrt{\Psi(t)-\Psi_m}} d\omega_{\parallel} e^{-\omega_{\parallel}^2} \int_0^{\infty} d\omega_{\perp} \omega_{\perp} e^{-\omega_{\perp}^2} = \\
 &= A' e^{-\Psi} [1 \pm \operatorname{erf}(\sqrt{\Psi_m - \Psi})]; \\
 \Gamma_P^H &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2\Gamma_i}{m_i}} A' e^{-\Psi_m} \int_{-\infty}^0 d\omega_{\parallel} \omega_{\parallel} e^{-\omega_{\parallel}^2} \int_0^{\infty} d\omega_{\perp} \omega_{\perp} e^{-\omega_{\perp}^2} = \\
 &= A' \sqrt{\frac{2\Gamma_i}{\pi m_i}} e^{-\Psi_m},
 \end{aligned}$$

где знак “-” относится к области 1, “+” — к области 2; $\omega_{\parallel, \perp} =$

$= \sqrt{\frac{m_i}{2\Gamma_i}} V_{\parallel, \perp}$; $\Psi = e\left(\frac{\varphi - \varphi_t}{T_i}\right)$; $\Psi_m = e\left(\frac{\varphi_m - \varphi_t}{T_i}\right)$; φ_t — потенциал плазмы на границе области ионизации с SOL; A' — плотность горячих ионов с $\omega_{\parallel} \geq 0$ при $\Psi = 0$.

Плотность холодных ионов согласно [12] равна

$$n_c = \rho \Gamma_P^H \sqrt{\frac{m_i}{2\Gamma_i}} \int_{\Psi}^{\Psi_m} d\Psi' \frac{H(\Psi')}{\sqrt{\Psi' - \Psi}} = \frac{A'}{\sqrt{\pi}} \rho e^{-\Psi_m} \int_{\Psi}^{\Psi_m} d\Psi' \frac{H(\Psi')}{\sqrt{\Psi' - \Psi}}.$$

Здесь ρ — коэффициент пропорциональности между источником холодных ионов и Γ_P^H ; если все нейтралы, возникающие при рекомбинации заряженных частиц на поверхности, возвращаются

в плазму, $p = 1/f_x$, где f_x — доля холодных ионов, возникающих в области 1; $H(\Psi)$ — функция источника, нормализованная на единицу Ψ и связанная с S_n соотношением

$$\rho \Gamma^H p H(\Psi) d\Psi = S_n(l) dl.$$

Электроны описываются распределением Больцмана $n = \lambda_e A' \exp(\tau\Psi)$, где $\tau = T_i/T_e$; λ_e — отношение полной плотности ионов к плотности ионов с $W_{ii} \geq 0$ при $\Psi = 0$.

Из условия квазинейтральности плазмы получаем уравнение для $\eta = \Psi_m - \Psi$:

$$\frac{\rho e^{-\Psi_m}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta d\eta' \frac{H(\eta')}{\sqrt{\eta - \eta'}} = \lambda_e e^{\tau(\Psi_m - \eta)} - e^{\tau - \Psi_m} [1 \pm \operatorname{erf}(\sqrt{\eta})],$$

которое после преобразования Абеля приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\rho e^{-\Psi_m}}{\sqrt{\pi}} H(\eta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \lambda_e e^{\tau\Psi_m} \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} - 2\sqrt{\tau} e^{-\tau\eta} D(\sqrt{\tau\eta}) \right] - \right. \\ \left. - \sqrt{\pi} e^{\tau - \Psi_m} \operatorname{erfi}(\sqrt{\eta}) - \frac{e^{-\Psi_m}}{\sqrt{\eta}} \mp \sqrt{\pi} e^{\tau - \Psi_m} \right\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $D(\lambda) = \int_0^\lambda e^{t^2} dt$ — интеграл Друсона.

Уравнения для определения параметров λ_e , f_x , Ψ_m и нормированного потенциала плазмы на границе слоя объемного заряда Ψ_s находим из интегралов (1.13) по областям 1 и 2:

$$\begin{aligned} \rho e^{-\Psi_m} f_x = \frac{2\lambda_e}{\sqrt{\pi\tau}} D(\sqrt{\tau\Psi_m}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\Psi_m}) - 1 + e^{-\Psi_m}; \\ \rho e^{-\Psi_m} (1 - f_x) = \frac{2\lambda_e}{\sqrt{\pi\tau}} D(\sqrt{\tau(\Psi_m - \Psi_s)}) - \\ - e^{-\Psi_s} \operatorname{erf}(\sqrt{\Psi_m - \Psi_s}) + e^{-\Psi_s} - e^{-\Psi_m} \end{aligned} \quad (1.14)$$

и условий обращения $H(\eta)$ в нуль при $\eta = \Psi_m$ (граница области ионизации) и $\eta = \Psi_m - \Psi_s$ (граница области квазинейтральности):

$$\begin{aligned} \lambda_e \frac{e^{\tau\Psi_m}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{\Psi_m}} - 2\sqrt{\tau} e^{-\tau\Psi_m} D(\sqrt{\tau\Psi_m}) \right] = \\ = \operatorname{erf}(\sqrt{\Psi_m}) + e^{-\Psi_m}/\sqrt{\pi\Psi_m} + 1; \end{aligned} \quad (1.15a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_e \frac{e^{\tau\Psi_m}}{\sqrt{\pi}} \left[1/\sqrt{\Psi_m - \Psi_s} - 2\sqrt{\tau} e^{-\tau(\Psi_m - \Psi_s)} D(\sqrt{\tau(\Psi_m - \Psi_s)}) \right] = \\ = e^{-\Psi_s} \operatorname{erf}(\sqrt{\Psi_m - \Psi_s}) + e^{-\Psi_m}/\sqrt{\pi(\Psi_m - \Psi_s)} - e^{-\Psi_s}. \end{aligned} \quad (1.15b)$$

Условия $H|_{\eta=\Psi_m, \Psi_m-\Psi_s} = 0$ следуют из (1.13). Первое из них

соответствует обращению в нуль физического источника холодных ионов S_n , второе — тому, что в дебаевском слое электрическое поле, пропорциональное $\partial\Psi/\partial l$, значительно больше, чем в области ионизации. Уравнения (1.14), (1.15) могут быть решены, даже если распределение физического источника $S_n(l)$ неизвестно. В [12] уравнения (1.13) — (1.15) обобщены на случай сильно неоднородного магнитного поля, который имеет место, например, в конфигурации с бандл-дивертором.

Поправки в электронном теплопереносе. Условие применимости столкновительного приближения для кондуктивной составляющей теплового потока вдоль магнитного поля нарушается при $\lambda_c \geq L_T/40$ [14], где L_T — характерный размер изменения температуры, т. е. значительно раньше, чем становится несправедливым гидродинамическое приближение. Действительно, в приближении $\lambda_c \ll L_T$, q_{\parallel}^* определяется на основе решения кинетического уравнения для поправки первого порядка к максвелловской функции распределения электронов по скоростям f^{e_0} :

$$q_{\parallel}^* \simeq -\frac{1}{3} \frac{\partial T_e}{\partial l} \int \frac{m_e v^2}{2T_e} v^2 \left(\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) f_0^e \tau_e(v) dv.$$

При кулоновских столкновениях $\tau_e \sim v^3$ и, следовательно, основной вклад в q_{\parallel}^* дают надтепловые электроны с $v \simeq 3,5\sqrt{T_e/m_e}$. Для них длина пробега до столкновений λ_x приблизительно в 40 раз больше, чем для тепловых частиц.

При $\lambda_x \geq L_T$ теплоперенос носит нелокальный характер, поскольку надтепловые электроны переносят энергию на расстояние больше L_T . Для его моделирования необходимо кинетическое описание электронов с учетом столкновений. Однако включение такого описания в транспортные модели плазмы не представляется возможным даже при современном уровне развития вычислительной техники. Поэтому используются приближенные методы учета нелокального характера переноса, развитые преимущественно для описания взаимодействия лазерного излучения с веществом.

В [15] для q_{\parallel}^* предложено феноменологическое выражение

$$q_{\parallel}^* = \int dl' q_{\parallel,0}^* W(l, l'), \quad (1.16)$$

где $W(l, l') = \frac{1}{2\lambda_x(l')} \exp \left\{ - \left| \int_{l'}^l dl'' n(l'') / [\lambda_c(l'') \cdot n(l'')] \right| \right\}$;

$$q_{\parallel,0}^* = -\kappa_{\parallel}^e \partial T_e / \partial l.$$

При $\lambda_x \ll L_T$ из (1.16) следует соотношение

$$q_{\parallel}^x \approx q_{\parallel,0}^x / [1 + (\lambda_x/L_T)^2]. \quad (1.17a)$$

В другом предельном случае с очень крутым градиентом температуры и однородной плотностью из (1.16) получаем

$$q_{\parallel}^x = q_{\text{max}} \approx 0,1 q_{FS}, \quad (1.17b)$$

где $q_{FS} = nT_e \sqrt{T_e/m_e}$ — поток тепла, который переносит свободный поток электронов.

Результаты расчетов с использованием (1.16) хорошо согласуются с данными исследований, полученными с использованием уравнения Фоккера — Планка.

Аналогичный (1.16) вид q_{\parallel}^x найден в [16] на основе аналитического решения усеченного уравнения Фоккера — Планка для надтепловых электронов с учетом малости их вклада в полную плотность заряженных частиц:

$$q_{\parallel}^x = - \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} \int dl' nT_e^{1/2} \left[p \left(\theta, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \frac{\partial T_e}{\partial l'} + p \left(\theta, \frac{1}{4}, 0 \right) eE_{\parallel} \right],$$

где $\theta = \left| \int_l^{l'} [dl''/\lambda_x(l'')] \right|$; E_{\parallel} — напряженность электрического поля;

$$p(\theta, \alpha, \beta) = \theta^{2+2\beta} \int_0^{\infty} dy \cdot y^{\beta} \exp \left[-\theta^{1/2} y^{1/2} - 1/y \right] \int_0^1 dy' \frac{y'^{\alpha}}{(1-y')^{1/2}} \times$$

$\times \exp \left[\frac{y'}{y(1-y')} \right]$ — нелокальный транспортный пропагатор.

При малых θ справедливо разложение $p(\theta) \approx p(0) + p'(\theta)\theta$; при $\theta \gg 1$ $p(\theta)$ экспоненциально мал:

$$p(\theta) \approx 32 \sqrt{\frac{2\pi}{5}} A \theta^{\gamma} \exp \left[-\frac{5}{4^{4/5}} \theta^{2/5} \right],$$

где константы $p(0)$, $p'(0)$, A , γ табулированы в [16].

Отметим также, что соотношение, близкое к (1.16), получено в [17] на основе 20-моментного метода Грэда.

1.3. Описание нейтрального компонента

Процессы с участием нейтральных частиц. Источником атомов и молекул водорода в пристеночной плазме токамака является нейтрализация плазмы на ограничивающих ее материальных поверхностях. Современные представления о взаимодействии плазмы с поверхностью подробно изложены, например, в

обзоре [18]. Кратко они сводятся к следующему. Результатом взаимодействия ионов или атомов с кинетической энергией E с материальной поверхностью может быть:

а) отражение в виде атомов с энергией E' ;

б) адсорбция, термализация, рекомбинация атомов в молекулы, выход термализованных атомов и молекул в плазму в результате процесса диффузии;

в) поверхностная ионизация атомов и отражение ионов без нейтрализации (при энергиях ниже 1 кэВ, представляющих для нас интерес, эти процессы не существенны);

г) эрозия поверхности, приводящая к загрязнению плазмы примесью, которая будет рассмотрена в гл. 5.

Вероятность отражения частиц $R(E, E')$ зависит от углов падения, отражения, зарядовых ($Z_{1,2}$) и массовых ($M_{1,2}$) чисел ядер падающих частиц и атомов мишени. Для количественного описания процесса отражения вводятся коэффициенты отражения потока частиц $R_N(E) = \int R(E, E') dE'$ и энергии $R_E(E) = \int R(E, E') E' dE' / E$. Информация о методах расчета $R_{N,E}$ может быть найдена в [18]. При нормальном падении частиц на поверхность экспериментальные зависимости $R_{N,E}(E)$ хорошо аппроксимируются формулами:

$$\left. \begin{aligned} R_N(E) &= [(1 + 3,2\varepsilon_L^{0,34})^{1,5} + (1,33\varepsilon_L^{1,5})^{1,5}]^{-0,67}; \\ R_E(E) &= [(1 + 7,1\varepsilon_L^{0,35})^{1,5} + (5,3\varepsilon_L^{1,5})^{1,5}]^{-0,67} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

в интервале $\varepsilon_L \geq 0,005$, где $\varepsilon_L = E/E_L$, $E_L = 30,8(M_1 + M_2) \times Z_1 Z_2 (Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{1/3} / M_2$ — энергия Линдхарта, эВ. Например, при бомбардировке никеля ионами дейтерия с $E = 50$ эВ, $\varepsilon_L \approx 0,018$, $R_N \approx 0,55$, $R_E \approx 0,35$.

При наклонном падении коэффициенты отражения возрастают, но так как из-за ускорения в дебаевском слое скорость ионов почти перпендикулярна поверхности, формулы (1.18) могут приближенно использоваться и в этом случае.

В плазме нейтральные частицы участвуют в большом числе элементарных процессов. Некоторые вычислительные модели [19], претендующие на точное количественное описание нейтрального компонента, включают до нескольких десятков таких процессов. В настоящем обзоре мы ограничимся учетом только тех из них, которые имеют наибольшие скоростные константы $|\sigma v|$ и оказывают существенное влияние на материальный и энергетический балансы плазмы токамака. К ним относится ионизация атомов электронами и их перезарядка на ионах, диссоциация и ионизация молекул электронным ударом. Информация о зависимости констант этих процессов (k^a_i , k_c , k_d и k^m_i соответственно) от энергии сталкивающихся частиц приведена в [20]. В интересующем нас диапазоне параметров $1 \text{ эВ} \ll T_{i,e} \ll$

≤ 1 кэВ константы, усредненные по максвелловскому распределению заряженных частиц, аппроксимируются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} k_i^a &\approx 0,73 \cdot 10^{-8} \sqrt{T_e} \frac{\exp(-13,6/T_e)}{1 + 0,01T_e}; \\ k_c &\approx 1,4 \cdot 10^{-8} \sqrt{\frac{m_p}{m_i}} T_i^{0,3}; \\ k_d &\approx 1,4 \cdot 10^{-8} \sqrt{T_e} \frac{\exp(-10, T_e)}{1 + 0,008T_e^2}; \\ k_i^m &\approx 0,76 \cdot 10^{-8} \sqrt{T_e} \frac{\exp(-15,4/T_e)}{1 + 0,005T_e} \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

где $k^{a,m,i}$, $k_{c,d}$ измеряются в $\text{см}^3/\text{с}$, $T_{i,e}$ — эВ.

Процессы на материальных поверхностях и в плазме приводят к появлению в ней нескольких групп нейтральных частиц, каждая из которых характеризуется определенной средней кинетической энергией. К первой группе отнесем молекулы и атомы, десорбирующие с поверхностей и имеющие ее температуру T_w . Вторая группа — атомы, возникающие при отражении ионов, ускоренных в дебаевском слое до энергии $E_i \approx (3/2)T_i + (T_e/2) + e\phi_s$. Третья группа — атомы с энергией $E_f \approx 3$ эВ, появляющиеся при диссоциации молекул и молекулярных ионов при франк-кондоновских переходах. Четвертая группа — атомы, которые возникают при перезарядке; их энергия E_* определяется температурой ионов. Отражение атомов двух последних групп от поверхности еще более усложняет картину. Далее все нейтралы, поступающие с поверхности, называются *первичными*. Представления об энергетическом спектре нейтральных частиц в пристеночной плазме токамаков, приведенные выше, подтверждаются данными экспериментов. На рис. 5 приведено распределение интенсивности излучения атомов дейтерия по длинам волн, измеренное вблизи лимитера токамака ТЭХТОР [21]. Форма распределения обусловлена доплеровским сдвигом из-за движения атомов с различными кинетическими энергиями (см. приведенную шкалу энергий). Температура пристеночной плазмы 20 эВ.

Кинетическое уравнение для нейтралов. В настоящем обзоре рассматриваются только ситуации, когда плотность нейтрального компонента в плазме достаточно низка и столкновения нейтралов между собой несущественны. В этом случае для их описания используются кинетические уравнения для функций распределения по скоростям [22, 23]:

молекулы

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_m = -(k^{m,i} + k_d) n f_m; \quad (1.20a)$$

первичные атомы

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_h = -(k^a_i + k_c) n f_h \quad (1.20б)$$

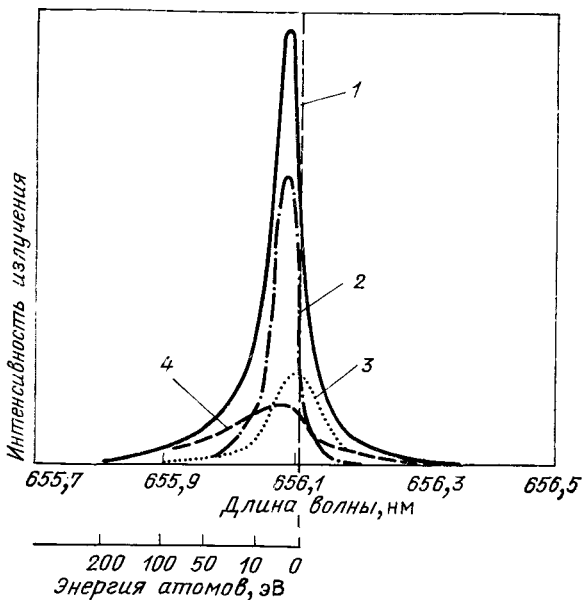


Рис. 5. Зависимость интенсивности излучения атомов водорода на линии H_α от длины волны вблизи лимитера токамака [21]:

1 — полная интенсивность; 2 — вклад франк-кондоновских атомов; 3 — вклад атомов, возникающих при перезарядке; 4 — вклад холодных атомов

(индексы $k=1 \div 4$ соответствуют различным группам первичных нейтралов, рассмотренным выше); атомы, возникающие при диссоциации

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_j = -(k^a_i + k_c) n f_j + (2k_a + k^m_i) n n_m \varphi_j(v); \quad (1.20в)$$

атомы, возникающие при перезарядке

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_* = -(k^a_i + k_c) n f_* + k_c n a f_i, \quad (1.20г)$$

где $f_{m,k,j,*i}$ — функции распределения нейтралов и ионов; $n_{m,k,j,*} = \int f_{m,k,j,*} dv$; $n_a = \sum n_k + n_f + n_*$; $\varphi_j(v)$ — зависимость источника франк-кондоновских атомов от их скорости.

В (1.20) пренебрегается нестационарными членами, поскольку характерные времена элементарных процессов с участием нейтралов, как правило, малы по сравнению с временами изменения параметров плазмы.

Переход к координатной записи уравнений (1.20) удобно сделать в системе координат ξ, η , где ξ перпендикулярна материальной поверхности, с которой взаимодействует плазма, η параллельна ей, причем направление η определяется взаимной ориентацией магнитного поля и поверхности. В дальнейшем будут рассмотрены ситуации с двумя вариантами ориентации:

1) поверхность параллельна гороидальной составляющей поля; 2) поверхность перпендикулярна тороидальной составляющей. К первому варианту относятся случаи первой стенки, нейтрализационных пластин полоидального дивертора и тороидального откачного лимитера (см. рис. 3); ко второму — полоидальный лимитер (см. рис. 54). При первом варианте связь между координатами ξ и η дается соотношениями $\xi = x \cos \varepsilon - (L_s - l) \sin \psi \sin \varepsilon$; $\eta = x \sin \varepsilon + (L_s - l) \sin \psi \cos \varepsilon$, где ψ — угол, который магнитное поле составляет с тороидальным направлением; ε — угол между материальной и магнитной поверхностями. При втором $\xi = L_s - l$; $\eta = x$.

Далее предполагается, что в направлении, перпендикулярном ξ и η , контакт плазмы с поверхностью однороден. Тем самым из рассмотрения исключаются ситуации, когда область контакта плазмы с поверхностью имеет существенно трехмерный характер.

В дальнейшем предполагается, что потоки частиц из плазмы уравновешены потоками нейтралов с поверхности. Для граничных функций распределения первичных нейтралов примем модельную форму [22]:

$$f_{m,k} |_{\xi=0} (v_\xi > 0) = \frac{j_{m,k}}{v_{m,k}} \delta(v_\xi - v_{m,k}) \cdot \frac{1}{2} [\delta(v_\eta - v_{m,k}) + \delta(v_\eta + v_{m,k})], \quad (1.21)$$

где $v_m = \sqrt{T_w/m_i}$; $v_1 = \sqrt{2T_w/m_i}$; $v_{2,3,4} = \sqrt{(R_E/R_N) \cdot (E_{i,f,*})^4 / (3m_i)}$, а потоки нейтральных частиц связаны с ξ -составляющей потока плазмы на поверхность Γ_P соотношениями, следующими из условий баланса частиц:

$$j_2 = \Gamma_P R_N (E_i); \quad j_{3,4} = R_N (E_{f,*}) \iint dv_\xi dv_\eta v_\xi f_{f,*} |_{\xi=0}; \\ 2j_m + j_1 = j_2 [1 - R_N (E_i) / R_N (E_i)] + j_3 [1 - R_N (E_i) / R_N (E_i)] + \\ + j_4 [1 - R_N (E_*) / R_N (E_*)]. \quad (1.22)$$

Доля атомов в общем потоке десорбирующих нейтралов — $\delta_a = j_1 / (2j_m + j_1)$ принимается в качестве параметра.

Условия (1.21) позволяют получить аналитические решения уравнений (1.20а), (1.20б) и в то же время достаточно адекватно отражают реальную ситуацию. Для $f_{f,*}$, описывающих атомы, рождающиеся в плазме, имеем:

$$f_{f,*} |_{\xi=0} (v_\xi > 0) = 0. \quad (1.23)$$

В заключение приведем выражения для членов S_n , R_n , Q_n , описывающих в уравнениях переноса плазмы (1.1) — (1.3) взаимодействие с нейтралами. Атомарные ионы появляются при ионизации атомов и диссоциации молекулярных ионов на ион и атом с энергиями франк-кондоновского перехода. Скоростная

константа последнего процесса значительно превышает k^{m_i} [20] и его можно считать «мгновенным». Следовательно,

$$S_n = (k^{a_i} n_a + k^{m_i} n_m) n. \quad (1.24)$$

Сила трения плазмы о нейтралы R_n обусловлена обменом импульсами первичных и франк-кондоновских атомов с ионами при перезарядке и поступлением в плазму импульса атомов при ионизации:

$$R_n = m_i \left\{ \sum_k [(V_k \sin \zeta - V_{\parallel}) k_c + V_k \sin \zeta k_i^a] n_k + V_{\parallel} (k_i^a n_* - k_c n_f) \right\} n, \quad (1.25)$$

где ζ — угол между магнитным полем и материальной поверхностью.

В потерях энергии плазмой можно выделить электронную и ионную составляющие: $Q_n = Q_n^e + Q_n^i$.

Электроны теряют энергию при диссоциации, ионизации и возбуждении атомов и молекул. Последние два вида потерь обычно объединяют, вводя так называемую *цену ионизации* E^{a, m_i} , учитывающую суммарные затраты энергии на ионизацию одной нейтральной частицы:

$$Q_n^e = \{ [2E_f k_d + (E_f + E^{m_i}) k^{m_i}] n_m + E^{a_i} k^{a_i} n_a \} n. \quad (1.26)$$

Согласно [24] цена ионизации молекул E^{m_i} близка к потенциалу ионизации $I_m \approx 15,4$ эВ. Цена ионизации атомов E^{a_i} рассчитана в [25] с учетом многоступенчатых процессов и зависимость E^{a_i} от плотности и температуры электронов хорошо аппроксимируется формулой

$$E_i^a \approx \left[30 - 16,4 \exp \left(- \frac{5 \cdot 10^{13}}{n} \right) \right] \exp \left\{ \frac{5,45}{T_e \exp \left[\left(\frac{n}{1,37 \cdot 10^{14}} \right)^{0,26} \right]} \right\},$$

где n измеряется в см^{-3} , E^{a_i} и T_e — в эВ. Например, при $T_e = 10$ эВ, $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ $E^{a_i} \approx 25$ эВ.

Ионный компонент плазмы обменивается энергией с нейтральным при перезарядке и приобретает энергию атомов при ионизации:

$$Q_n^i = \{ [n_2 E_i + (n_3 + n_f) E_f + (n_4 + n_*) E_*] (k^{a_i} + k_c) - k_c n_a E_* \} n. \quad (1.27)$$

Потери энергии электронами на возбуждение примесей будут рассмотрены в гл. 5.

Диффузионное приближение для нейтралов. Если температура электронов в пристеночной плазме заметно ниже потенциалов ионизации нейтралов водорода, то глубина проникновения атомов в плазму l_* , которая определяется константой иони-

зации, существенно превышает длину пробега до перезарядки l_c . В этом случае движение атомов носит характер случайных блужданий между актами перезарядки и может быть описано в диффузионном приближении [26] при условии, что параметры плазмы слабо меняются на расстояниях порядка l_c . Рассмотрим случай, когда все параметры изменяются только в направлении ξ . Уравнения диффузионного приближения получим, интегрируя (1.20г) по пространству скоростей с весами 1 и v_{ξ} , учитывая, что f_* близка к максвелловскому распределению с температурой ионов. Принимая во внимание, что на расстояниях от материальной поверхности больше l_c плотность первичных и франк-кондоновских атомов пренебрежимо мала, имеем

$$\left. \begin{aligned} d_{j_*}/d\xi &= -k_i^a n n_*; \\ j_* &= -(k_c n m_i)^{-1} d(n_* T_i)/d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Уравнения (1.28) позволяют, в частности, оценить глубину проникновения атомов в плазму [26]:

$$l_* \simeq \sqrt{T_i / (m_i k_i^a k_c)} / n. \quad (1.29)$$

При условии $k_i^a \ll k_c l_*$ действительно велика по сравнению с l_c .

Глава 2

РЕЦИКЛИНГ ПЛАЗМЫ НА СТЕНКЕ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ МАГНИТНОМУ ПОЛЮ

2.1. Аналитические методы решения кинетических уравнений для нейтралов

Теоретические исследования конфигураций без SOL с рециклингом на стенке, параллельной магнитному полю, были начаты в ставших классическими работах [2, 3]. В дальнейшем интерес к ним усилился в связи с развитием идеи создания бездиверторной конфигурации в реакторе на основе концепций газового blankets [26], турбулентного плазменного blankets [27, 32] и эргодического лимитера [81].

При определенных условиях результаты этих исследований могут использоваться для описания периферийной области разряда в конфигурации с лимитерами. Кроме того, в последние годы в токамаках применяют так называемые бампер-лимитеры, которые по существу представляют значительную часть первой стенки, с которой плазма взаимодействует достаточно однородно в тороидальном и полоидальном направлениях.

Изучение пристеночной области при рециклинге плазмы на стенке, параллельной магнитному полю, начнем с рассмотрения нейтрального компонента. В данном случае $\xi = x$ и $v \nabla = v_x \partial / \partial x$. Уравнения (1.20) проинтегрируем по составляющей скорости, перпендикулярной оси x , v_{\perp} .

Получаем уравнения для функций $F_{m,k,f,*} = \int f_{m,k,f,*} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp}$, аналогичные (1.20) при условии замены f_i и φ_i на $F_i = \int f_i 2\pi v_{\perp} dv_{\perp}$ и $\Phi_i = \int \varphi_i \cdot 2\pi v_{\perp} dv_{\perp}$.

Если температура электронов превышает потенциал ионизации атомов водорода I_H , константу k^{a_i} можно считать слабо зависящей от параметров плазмы. Уравнение для полной функции распределения атомов $F = F_* + \sum_k F_k$ записывается в виде [22]

$$\omega \partial F / \partial u + F = (1 - \beta^2) g(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} F d\omega, \quad (2.1)$$

где $\omega = v_x / v_i$; $v_i = \sqrt{2T/m_i}$; $u = \int_0^x n(k_i^a + k_c) dx / v_i$ — безразмерная координата; $g(\omega) = F_i(v_x) / n$; $\beta = \sqrt{k_i^a / (k_i^a + k_c)}$.

В [3, 22, 28, 29] решение уравнения (2.1) было найдено при различных предположениях относительно вида функции источника $g(\omega)$ и профиля температуры плазмы в пристеночной области.

Двухскоростное распределение ионов, постоянная температура. В [22, 28] для получения аналитического решения (2.1) было принято двухскоростное распределение ионов, т. е.

$$g(\omega) = [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] / 2. \quad (2.2a)$$

Кроме того, предполагалось, что температура плазмы постоянна по ширине пристеночной области.

Ниже приводятся результаты [22], обобщенные на случай, когда в плазме представлены все группы нейтралов, описанные в гл. 1. По аналогии с (2.2a) для $\Phi_f(v_x)$ принята зависимость

$$\Phi_f(v_x) = [\delta(v_x - v_f) + \delta(v_x + v_f)]. \quad (2.2b)$$

Решения уравнений для $F_{m,k,f,*}$ ищем в виде

$$F_{m,k} = A_{m,k}(u) \delta(v_x - v_{m,k});$$

$$F_{f,*} = A_{f,*}^-(u) \delta(v_x - v_{f,*}) + A_{f,*}^+(u) \delta(v_x + v_{f,*}),$$

где коэффициенты $A(u)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_{m,k}}{du} &= -\gamma_{m,k} A_{m,k}; \quad \pm \frac{dA_f^\pm}{du} = -z_f A_f^\pm + z_m^f \frac{A_m}{2}; \\ \pm \frac{dA_*^\pm}{du} &= -A_*^\pm + \frac{1-\beta^2}{2} (A_1 + A_2 + A_f^- + A_f^+ + A_*^+ + A_*^-), \end{aligned} \right\} (2.3)$$

где

$$z_m = \frac{k_i^* + k_j}{v_m \sigma}; \quad z_k = \frac{v_i}{v_k}, \quad z_f = \frac{v_i}{v_f}, \quad \sigma = \frac{k_i^* + k_c}{v_i}.$$

При решении (2.3) учтем сильное различие средних энергий нейтральных частиц, принадлежащих различным группам: $T_w \ll E_f \ll E_* \approx T_i \sim E_i$. Кроме того, примем во внимание, что в интересующем нас диапазоне энергий частиц, взаимодействующих с поверхностью, коэффициенты отражения частиц и энергии различаются слабо, т. е. отражение происходит практически с сохранением энергии. В результате с учетом граничных условий (1.21)–(1.23) получим следующие соотношения для плотностей нейтралов и их потоков $j_{m,h,f,*}$:

$$\left. \begin{aligned} n_m &= (\Gamma_P/v_m) \rho_m^w \xi_f (1 + R_E^f) \exp(-z_f u); \\ n_1 &= \frac{\Gamma_P}{v_1} \frac{2\delta_a \rho_m^w}{1-\delta_a} \exp(-z_1 u); \quad n_2 = \frac{\Gamma_P}{v_2} R_E^f \exp(-z_2 u); \\ n_f &= (\Gamma_P/v_f) \rho_m^w \xi_f (1 + R_E^f) \exp(-z_f u); \\ n_* &= (\Gamma_P/v_*) [\rho_0^w \exp(-\beta u) - (1-\beta^2) \alpha_2 \exp(-z_2 u)]; \\ j_{m,k} &= n_{m,k} v_{m,k}; \quad j_f = \Gamma_P \rho_m^w \xi_f [(1 + R_E^f) \exp(-z_f u) - \\ &\quad - 2 \exp(-z_m u)]; \\ j_* &= \Gamma_P \{ \rho_0^w \beta \exp(-\beta u) - (1-\beta^2) [(2\delta_a \rho_m^w / (1-\delta_a)) \times \\ &\quad \times \exp(-z_1 u) + z_2 \alpha_2 \exp(-z_2 u) + (1 + R_E^f) \xi_f + \\ &\quad + \rho_m^w \exp(-z_f u)] \}, \end{aligned} \right\} (2.4)$$

$$\text{где} \quad \xi_f = \frac{k_j + k_i^m/2}{k_d + k_i^m}; \quad \rho_m^w = \frac{1 - R_E^f + \alpha_* \alpha_2 (z_2 - \beta)}{2/(1-\delta_a) - \xi_f (1 - R_E^f) - \alpha_* \alpha_m};$$

$$\rho_0^w = \alpha_* \left[\frac{1 + R_E^*}{1 - R_E^*} (\alpha_m \rho_m^w + \alpha_2 z_2) + \alpha_2 \right]; \quad \alpha_* = \frac{(1-\beta^2)(1 - R_E^*)}{1 - R_E^* + \beta(1 + R_E^*)};$$

$$\alpha_m = 2\delta_a / (1 - \delta_a) + (1 + R_E^f) \xi_f; \quad \alpha_2 = z_2 R_E^f / (z_2^2 - \beta^2);$$

$$R_E^{i,f,*} = R_E(E_i, E_f, E_*).$$

Из (2.4) следует, что плотность атомов, возникающих при перезарядке, спадает с удалением от стенки пропорционально $\exp(-\beta u)$, т. е. в однородной плазме глубина проникновения нейтралов $l_* = \sqrt{T_i / [m_i k^2 (k^2 + k_c)]} / n$, что при $k^2/k_c \rightarrow 0$ совпадает с (1.29), полученным в диффузионном приближении.

Влияние градиента температуры. В [30] рассмотрено влияние на профиль плотности нейтралов поперечного градиента температуры. Предполагалось, что характерная длина изменения тепловой скорости ионов $L_{v_i} = du/d \ln v_i$ не зависит от u . В этом случае, вводя функцию $f_n = v_i(u) F(\omega, u)$, перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\omega \frac{\partial f_n}{\partial u} + f_n - (\omega / L_{v_i}) \frac{\partial (f_n \omega)}{\partial \omega} = (1 - \beta^2) n_a g(\omega). \quad (2.5)$$

Заменой переменных $\psi_n = \omega f_n \exp(L_{v_i}/\omega)$, $t_* = L_{v_i} \ln \omega$ оно сводится к квазилинейному уравнению в частных производных первого порядка:

$\partial \psi_n / \partial u - \partial \psi_n / \partial t_* = (1 - \beta^2) n_a g(t_*) \exp(L_{v_i}/\omega)$, которое может быть решено методом характеристик. Вводя $\bar{x} = -u - t_*$, $\bar{u} = u$, для полубесконечной плазмы получаем

$$\psi_n(u, t_*) = \xi_0(\bar{x}) + \int_0^{\bar{u}} g(-\bar{u}' - \bar{x}) \exp[L_{v_i}/\omega(-\bar{u}' - \bar{x})] \times \\ \times (1 - \beta^2) n_a(\bar{u}') d\bar{u}', \quad \omega > 0; \quad (2.6)$$

$$\psi_n(\bar{u}, t_*) = - \int_{\bar{u}}^{\infty} g(-\bar{u}' - \bar{x}) \exp[-L_{v_i}/\omega(-\bar{u}' - \bar{x})] (1 - \beta^2) \times \\ \times n_a(\bar{u}') d\bar{u}', \quad \omega < 0,$$

где $\xi_0(x)$ соответствует граничным условиям для ψ_n .

Если для $g(\omega)$ принять (2.2а), из (2.6) можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для n_a . Для этого (2.6) проинтегрируем по пространству скоростей и дважды продифференцируем по u . Если, следуя [30], принять, что со стенки в плазму поступают первичные атомы с приведенной скоростью ω_0 , то

$$d^2 n_a / du^2 - L_{v_i}^{-1} dn_a / du - \beta^2 n_a - 2n_a / L_{v_i}^2 = d^2 n_1 / du^2 - n_1, \quad (2.7)$$

где n_1 — плотность первичных атомов. Общее решение (2.7) имеет вид:

$$n_a(u) = \varphi_2 \int \frac{\varphi_1 h}{\omega} du' - \varphi_1 \int \frac{\varphi_2 h}{\omega} du' + c_1 \varphi_1, \quad (2.8)$$

где $\varphi_{1,2} = \exp(-X_{1,2}u)$; $X_{1,2} = -1/(2L_{v_i}) \pm \sqrt{9/(2L_{v_i})^2 + \beta^2}$;

$$h = \left(\frac{1}{\omega_0^2} - 1 \right) n_1; \quad \omega = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'.$$

Из (2.8) следует, что при $\omega_0 \ll 1$ длина спада плотности нейтралов определяется величиной X_1 и при $\beta L_{v_i} < 1$ в $\beta / [\sqrt{9/(2L_{v_i})^2 + \beta^2} - 1/(2L_{v_i})]$ раз меньше, чем в случае, когда градиент температуры плазмы в пристеночной области отсутствует. Это обусловлено ростом средней скорости нейтралов с удалением от стенки: если даже поток атомов j_a сохраняется ($\beta=0$), их плотность спадает с ростом x как $j_a/v_i \sim \exp(-u/L_{v_i})$.

В [31] влияние градиента температуры плазмы на нейтралы рассматривалось в предположении, что для последних справедливо диффузионное приближение.

Максвелловское распределение ионов. Более адекватным реальной ситуации по сравнению с (2.1а) является зависимость $g(\omega)$, соответствующая максвелловскому распределению ионов по скоростям:

$$g(\omega) = g_m = \exp(-\omega^2)/\sqrt{\pi}. \quad (2.9)$$

В [22] уравнение (2.1) было решено с $g(\omega)$ в виде (2.9) численно. Позднее в [29] было найдено решение данной задачи в квадратурах методом собственных функций.

В [22] проведено сравнение результатов решения уравнения (2.1) с $g(\omega)$ в виде (2.2а) и (2.9) и показано, что различия в $g(\omega)$ слабо сказываются на моментах функции распределения атомов, таких как плотность, потоки частиц и энергии. На рис. 6 представлены профили плотности $n_a(u)$, рассчитанные в [22] для обоих случаев.

Аналогичные выводы следуют и из результатов [29]. Выражения для альбедо плазмы A_l , равного отношению потоков перезарядившихся атомов из плазмы и нейтралов со стенки, при $\omega_0 \ll 1$ совпадают для двухскоростного и максвелловского распределения ионов: $A_l \approx 1 - \beta$. В случае $\omega_0 = 1$ $A_l = (1 - \beta)(1 + \beta)$ для $g(\omega)$ в виде (2.2а) и $A = (1 - \beta^2)/(1 + 2\beta - \beta^2)$ при $g = g_m$.

Так как $\beta \leq 0,6$, эти значения различаются не более чем на 15%.

Таким образом, при рассмотрении транспортных свойств плазмы для n_a с хорошей точностью можно использовать аналитические соотношения, полученные для двухскоростного распределения ионов по скоростям.

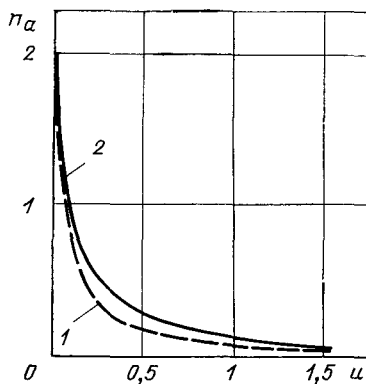


Рис. 6. Профили плотности атомов при двухскоростном (1) и максвелловском (2) распределении ионов по скоростям

2.2. Стационарное состояние плазмы в пристеночной области

Перейдем к рассмотрению плазмы в пристеночной области при рециклинге частиц на первой стенке. В этой и последующих главах предполагается, что условия гидродинамического приближения выполнены и оправдано использование системы уравнений (1.1) — (1.3).

Основные допущения. Рассмотрим стационарные однородные вдоль магнитного поля состояния пристеночной плазмы, считая ее изотермической: $T_i \approx T_e = T$ (условия применимости этого приближения обсуждаются ниже). Полагая в уравнениях (1.1), (1.3) производные по времени и координате l равными нулю, получаем:

$$d\Gamma_{\perp}/d\lambda = S_n; \quad dq_{\perp}/dx = -Q_n \quad (2.10)$$

(влияние излучения примесей рассмотрено в гл. 5).

Аналитическое решение (2.10) получено в [32] в предположении, что изменение температуры плазмы по ширине пристеночной области ΔT мало по сравнению с ее значением на стенке $-T_p$. При $\Delta T \ll T_p$ можно пренебречь градиентом температуры при описании нейтрального компонента. Оценим характерную безразмерную длину изменения v_i : $L_{v_i} = du/d \ln v_i = 2du/d \ln T \approx (2/\beta) T_p/\Delta T$, так как ширина пристеночной области в единицах u порядка $1/\beta$. Следовательно, коэффициент, характеризующий спад плотности атомов, равен $X_1 \approx \beta[\sqrt{1 + (9/16)(\Delta T/T_p)^2} - \Delta T/(4T_p)]$. Отсюда $0,95\beta \leq X_1 \leq \beta$, т. е. для плотностей и потоков атомов можно использовать соотношения (2.4), полученные в предположении $T(x) = \text{const}$ и дающие $X_1 = \beta$.

В первом приближении по $\Delta T/T_p$ изменение температуры в пристеночной области учтем введением ее среднего значения $\bar{T} = \theta \bar{T}_p$, где коэффициент θ подбирается из условия наилучшего совпадения аналитических и численных результатов, полученных с учетом изменения T [27]. Введение \bar{T} не вносит значительной погрешности, если $T_p \geq l_H$, так как в противном случае изменение константы ионизации по ширине пристеночной области велико.

Балансы тепла и частиц в пристеночной области. Первый интеграл уравнения непрерывности соответствует равенству нулю полного потока вещества — как заряженных, так и нейтральных частиц:

$$\Gamma_{\perp} + 2j_m + j_1 + j_2 + j_f + j_* = 0, \quad (2.11)$$

поскольку мы рассматриваем ситуацию сильного рециклинга на стенке, когда поток плазмы в пристеночную область из центра разряда Γ_0 мал по сравнению с Γ_p .

Для коэффициента поперечной диффузии зависимость от параметров плазмы примем в виде

$$D_{\perp} = D_0 n^{\gamma_n} T^{\gamma_T}. \quad (2.12)$$

В этом случае первый член в (2.11) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp} &= -D_{\perp} \frac{dn}{dx} = -D_0 n^{\gamma_n} T^{\gamma_T} \frac{dn}{dx} = -D_0 T^{\gamma_T} n^{\gamma_n+1} \times \\ &\times \frac{dn \hat{\sigma}}{\hat{\sigma} n dx} = -\frac{D_0 T^{\gamma_T} \hat{\sigma}}{\gamma_n + 2} \frac{d \gamma_n^{n+2}}{du}. \end{aligned}$$

Согласно (2.4) сумма потоков нейтралов может быть представлена в виде $\Gamma_P \chi(u)$ и (2.11) приводится к уравнению для n^{γ_n+2} как функции u :

$$\frac{dn^{\gamma_n+2}}{du} = \frac{(\gamma_n + 2) \Gamma_P}{D_0 T^{\gamma_T} \hat{\sigma}} \chi(u). \quad (2.13)$$

Интегрируя (2.13) с граничным условием (1.9а), получаем

$$n^{\gamma_n+2} = \left(\frac{\Gamma_P}{v_w} \right)^{\gamma_n+2} + \frac{\gamma_n + 2}{D_0 T^{\gamma_T} \hat{\sigma}} \Gamma_P \int_0^u \chi(u) du. \quad (2.14)$$

Если $n_0 \gg \Gamma_P / v_w$, (2.14) позволяет связать Γ_P с плотностью плазмы на границе пристеночной области. Полагая $u(x_0) = \infty$ и проводя интегрирование, выразив $\chi(u)$ с помощью (2.4), находим:

$$\Gamma_P = \frac{D_w n_0^2 \hat{\sigma}}{(2 + \gamma_n) [\rho_0^w + \alpha_2 \beta^2 (1 - 1, z_2^2)]}, \quad (2.15)$$

где $D_w = D_0 T^{\gamma_T} n_0^{\gamma_n}$.

Уравнение баланса тепла проинтегрируем, полагая в $Q_n T = \bar{T}$. В результате имеем

$$q_0 = \Gamma_P [\gamma_0 T_P - R_E E_i + \rho_*^w E_x + E_i^a + E_i^{na}], \quad (2.16)$$

где $E_i^{na} = \rho_m^w \frac{k_i^n}{k_i^m + k_i} (E_i^m - E_i^a)$; $\rho_*^w = \alpha_* [\alpha_m \rho_m^w + \alpha_2 (z_2 - \beta)]$.

Соотношения (2.15), (2.16) позволяют определить границы области применимости приближения изотермической плазмы. Интеграл от члена, учитывающего обмен энергией между ионами и электронами при кулоновских столкновениях,

$$Q_{ie} = 3 \frac{m_e}{m_i} \frac{n}{\tau_e} (T_e - T_i)$$

по ширине пристеночной области не превышает q_0 . Так как $x_0 \approx \approx 1/(n_0\sigma_*)$, где $\sigma_* = \hat{\beta}\sigma$ — сечение, определяющее глубину проникновения атомов в плазму, имеем

$$|T_e - T_i|/T_e \leq q_0\sigma_*\tau_e m_i / (3m_e T_p).$$

Используя характерные значения числовых констант, находим, что условие $|T_e - T_i| \ll T_e$ заведомо справедливо при

$$q_0^3 \ll D_{\perp} n_0^4,$$

где q_0 — в Вт/см², D_{\perp} — в м²/с, n_0 — в 10¹³ см⁻³, что практически всегда выполняется для плазмы токамаков.

При заданных параметрах q_0 , n_0 , D_0 , γ_n , γ_T соотношения (2.15), (2.16) позволяют найти температуру плазмы вблизи стенки T_p , определяющую характер ее взаимодействия с материальной поверхностью в отношении эрозии стенки и загрязнения плазмы примесью. Введенный выше коэффициент $\bar{\theta}$ определяется из условия совпадения числовых значений T_p , полученных из решения уравнений (2.15), (2.16) и численного решения уравнений переноса для плазмы и кинетических уравнений для атомов по модели, описанной в [27]. В случае боровских коэффициентов ($\gamma_n = 0$; $\gamma_T = 1$) $\bar{\theta}$ равно 1,2. Если зависимость D_{\perp} , κ_{\perp} от T более слабая, отличие $\bar{\theta}$ от 1 еще незначительнее, так что учет различия \bar{T} и T_p превышает точность.

Проанализируем влияние энергетического спектра нейтралов, поступающих со стенки на параметры плазмы вблизи нее. Рассмотрим два в некотором смысле предельных случая.

1. Все нейтралы, поступающие со стенки, являются атомами со средней энергией $E_* = 3T_p/2$. Тогда

$$\Gamma_p = \Gamma_{p,1} \equiv \frac{D_{\infty} n_0^2 \sigma_*}{2 + \gamma_n}; \quad T_p = T_{p,1} \equiv \frac{q_0}{(\gamma_0 - 3/2)\Gamma_p}, \quad (2.17)$$

2. Со стенки поступают атомы с $E_k \ll T_p$:

$$\Gamma_p = \Gamma_{p,2} \equiv \frac{D_{\infty} n_0^2 \sigma_*}{2 + \gamma_n} \frac{1}{1 - \beta}; \quad T_p = T_{p,2} \equiv \frac{q_0}{[\gamma_0 + (3/2)(1 - \beta)/(2\beta)]\Gamma_p}. \quad (2.18)$$

Холодные атомы ионизируются на малых расстояниях от стенки. Поэтому во втором случае градиент плотности плазмы более крутой и $\Gamma_{p,2}$ превышает $\Gamma_{p,1}$ в $1/(1 - \beta)$ раз. Значения энергий ионов, взаимодействующих со стенкой в двух рассмотренных выше случаях, могут различаться в 2—3 раза.

На рис. 7 представлена зависимость температуры пристеночной плазмы от параметра $t_p = q_0(2 + \gamma_n)/(D_{\infty} n_0^2 \sigma_0)$, $\sigma_0 = = 10^{-14}$ см² при $\gamma_T = 0$ для «идеализированных» спектров первичных нейтралов и для случая, когда учтены все группы ней-

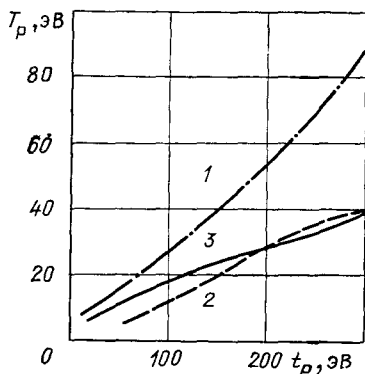


Рис. 7. Зависимость температуры периферийной плазмы T_p от t_p в приближении горячих (1), холодных (2) первичных нейтралов и в случае их расширенного энергетического спектра (3)

тралов, описанные в § 1.3; материал стенки — нержавеющей сталь. Типичным экспериментальным условиям ($q_0=3$ Вт/см², $D_w=1$ м²/с, $n_0=3 \cdot 10^{13}$ см⁻³) соответствует $t_p \cong 200$ эВ. При расчетах коэффициент δ_a , определяющий соотношение молекулярной и атомарной составляющих в потоке частиц, десорбирующих со стенки, был принят равным 0,5. Его фактическое значение зависит от состояния поверхности, наличия дефектов в материале и интенсивности потоков падающих частиц. Анализ показывает, что изменение δ_a в диапазоне от 0,05 до 0,95 приводит к варьированию T_p на 15—20%.

Из рис. 7 следует, что приближение горячих первичных нейтралов адекватно реальной ситуации при малых T_p , когда коэффициенты отражения близки к единице. При $T_p \geq 20$ эВ более точным является приближение холодных первичных атомов.

Профили параметров плазмы. При известных числовых значениях Γ_p и T_p профиль плотности плазмы в пристеночной области может быть найден из уравнения (2.14). Используя связь $n = (1/\hat{\sigma}) du/dx$, приводим (2.14) к виду

$$\frac{du}{dx} = \hat{\sigma} n_0 \left[\varepsilon_w \gamma_n^{n+2} + \beta \frac{\Gamma_p}{\Gamma_{p,1}} \int_0^u \chi(u) du \right] \frac{1}{\gamma_n^{n+2}}, \quad (2.19)$$

где $\varepsilon_w = n|_{x=0}/n_0 = \Gamma_p/(V_w n_0) \ll 1$.

Профили $u(x)$, $n(x)$ можно найти, интегрируя (2.19) численно с граничным условием $u|_{x=0}=0$. Однако в некоторых случаях, представляющих практический интерес, уравнение (2.19) имеет аналитические решения в элементарных функциях, когда между энергиями первичных атомов и температурой пристеночной плазмы справедливы соотношения, рассмотренные выше: $E_h \ll T_p$, $E_h = (3/2) T_p$.

1) Коэффициент диффузии, не зависящий от плотности плазмы: $\gamma_n = 0$. В таком случае

$$\left. \begin{aligned} du/dx &= \widehat{\sigma} n_0 \sqrt{1 - (1 - \varepsilon_w^2) \exp(-\beta u)}; \\ u &= \frac{2}{\beta} \ln \left[\sqrt{1 - \varepsilon_w^2} \operatorname{ch} \left(\operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_w^2}} + \frac{s}{2} \right) \right]; \\ n &= n_0 \operatorname{th} \left(\operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_w^2}} + \frac{s}{2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

где $s = \sigma_* n_0 x$.

2) Скейлинг Alcator: $\gamma_n = -1$. При этом

$$\left. \begin{aligned} du/dx &= \widehat{\sigma} n_0 (1 + \varepsilon_w - \exp(-\beta u)); \\ u &= \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{1 + \varepsilon_w \exp(1 + \varepsilon_w) s}{1 + \varepsilon_w} \right\}; \\ n &= n_0 \frac{1 + \varepsilon_w}{1 + \exp[-(1 + \varepsilon_w) s] \varepsilon_w}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Соотношения (2.20), (2.21) позволяют уточнить вид профиля температуры плазмы в пристеночной области, которая выше считалась не зависящей от x . При $E_h = (3/2) T_P$ или $E_h \ll T_P$ первый интеграл уравнения теплового баланса имеет вид:

$$\kappa_{\perp} dT/dx = q_0 - \Gamma_{\perp} (3,5T + E_i^a). \quad (2.22)$$

Принимая $\kappa_{\perp} = \alpha_x n D_{\perp}$, где α_x — числовой множитель, не зависящий от параметров плазмы, и полагая в первом приближении в правой части (2.22) $T = T_P$, находим:

1) при $\gamma_n = 0$

$$T \cong T_P \left\{ 1 + \frac{\gamma_T + 1}{\alpha_x} \left[\gamma_1 \ln \frac{\operatorname{sh}(s/2 + \varepsilon_w)}{\operatorname{sh} \varepsilon_w} - \gamma_2 \ln \frac{\operatorname{th}(s/2 + \varepsilon_w)}{\operatorname{th} \varepsilon_w} \right] \right\} \frac{1}{\gamma_T + 1}; \quad (2.23)$$

2) при $\gamma_n = -1$

$$T \cong T_P \left\{ 1 + \frac{\gamma_T + 1}{\alpha_x} \left[(\gamma_1 - \gamma_2) s + \gamma_2 \ln \frac{1 + \varepsilon_w e^s}{1 + \varepsilon_w} \right] \right\} \frac{1}{\gamma_T + 1}, \quad (2.24)$$

где $\gamma_1 = q_0 / (\Gamma_{P,1} T_P)$; $\gamma_2 = 3,5 + E_i^a / T_P$.

2.3. Неустойчивость состояния с рециклингом плазмы на стенке

Качественные соображения. Состояние пристеночной плазмы с рециклингом на стенке может быть неустойчиво по отношению к двумерным возмущениям [33]. Качественно механизм неустойчивости объясняется следующим. Рассмотрим возмущение плотности, представленное на рис. 8. При $D_{\perp}(x) = \text{const}$

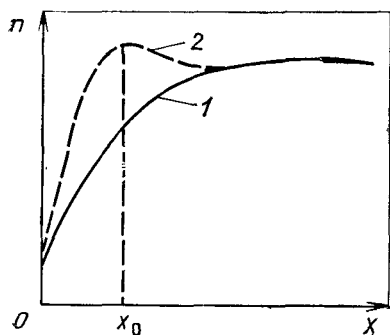


Рис. 8. Стационарный (1) и возмущенный (2) профили плотности плазмы

оно приводит к увеличению потока заряженных частиц на стенку и понижению температуры. Так как из соотношений (2.17), (2.18) следует $T_p \sim \sim 1/n^2_0$, давление в области возмущения при $x \leq x_0$ падает и возникает течение плазмы вдоль магнитного поля, которое способствует нарастанию возмущений. К росту возмущения приводят и усиление потока нейтралов со стенки и их ионизация в области $x \leq x_0$. При $x \geq x_0$ температура плазмы возмущается слабо,

поскольку здесь основным механизмом теплопереноса является теплопроводность. Следовательно, в этой области давление плазмы при возникновении возмущения увеличивается по сравнению с соседними участками, расположенными на той же магнитной поверхности. В результате плазма растекается от возмущения, что компенсирует поток за счет поперечной диффузии.

Линеаризованные уравнения переноса. При количественном анализе неустойчивости воспользуемся приближением горячих первичных атомов.

Возмущения плотности \tilde{n} , температуры \tilde{T} и скорости течения вдоль магнитного поля $\tilde{V}_{||}$ примем в виде $f(x) \exp(\gamma t + ik_* l)$.

Введем переменные $\tilde{u} = \int_0^x \tilde{n} d\lambda$, $\tilde{w} = \int_0^x n \tilde{V}_{||} dx$. Предполагая, что

в пристеночной области \tilde{T} , как и T , слабо зависит от x , линеаризованные уравнения (1.1)–(1.3) проинтегрируем по x :

$$\gamma \tilde{u} - \frac{D_{\perp}}{x_0^2} \frac{d^2 \tilde{u}}{ds^2} + i k_* \tilde{w} - \frac{D_{\perp}}{x_0} \frac{dn}{ds} \left(\frac{\gamma n}{\lambda_0 n} \frac{d\tilde{u}}{ds} + \right. \\ \left. + \gamma_T \frac{\tilde{T}}{T_p} + u \frac{\tilde{\sigma}_*}{\sigma} + \tilde{u} \sigma_* \right) + \tilde{\Gamma}_p e^{-\beta u} = 0; \quad (2.25)$$

$$\gamma \tilde{w} + i k_* V_s^2 \left(\tilde{u} + \frac{u}{\sigma} \frac{\tilde{T}}{T_p} \right) + \frac{\tilde{w}}{\tau_n} = 0; \quad (2.26)$$

$$3\gamma \left(\tilde{u} T_p + \frac{u}{\sigma} \tilde{T} \right) + \tilde{q}_{\perp}(0) - \tilde{q}_{\perp}(x) + \kappa_{||}^e x_0 k_*^2 \tilde{T}_s + 5i T_p \tilde{w} = 0, \quad (2.27)$$

где $\tilde{\sigma}_* = \sigma_* \gamma_{\sigma} \tilde{T} / T_p$; $\gamma_{\sigma} = d \ln \sigma_* / d \ln T$; $\tau_n = 2 / ((1 - \beta) \sigma \tilde{\Gamma}_p)$ — время передачи импульса от ионов атомам при перезарядке.

Граничные условия уравнений (2.25)–(2.27) при $s=1$ выберем, полагая, что здесь возмущения плотности (рис. 8) достигают максимума:

$$d^2\tilde{u}/ds^2|_{s=1}=0, \quad (2.28a)$$

а поперечный тепловой поток при $s \gtrsim 1$ не возмущается, так как возмущения температуры подавлены высокой продольной теплопроводностью:

$$\tilde{q}_\perp|_{s=1}=0. \quad (2.28б)$$

При $s=0$ граничные условия получаем, линеаризуя (1.8), (1.9) и считая $V_w \sim V_s \sim \sqrt{\tilde{T}}$:

$$\tilde{q}_\perp|_{s=0} = \gamma_0 (\Gamma_P \tilde{T} + \tilde{\Gamma}_P T_P); \quad (2.29a)$$

$$\tilde{\Gamma}_P/\Gamma_P = \tilde{n}/n|_{s=0} + \tilde{T}/(2T_P). \quad (2.29б)$$

При рассмотрении случая с $\gamma_n=0$ воспользуемся условием $\varepsilon_w \ll 1$ и вместо (2.29б) примем

$$\tilde{n}/s=0=0. \quad (2.29в)$$

Кроме того,

$$\tilde{u}/s=0=0. \quad (2.29г)$$

При $s=1$ из уравнений (2.26), (2.27) с учетом (2.28) находим

$$\frac{\tilde{T}}{T_P} = -a_1 \frac{\tilde{u}(1)}{u(1)} \hat{\sigma} - a_2 \frac{\tilde{\Gamma}_P}{\Gamma_P},$$

где $a_1 = (3v_* + 5\eta_*)/d_0$; $a_2 = \gamma_0/d_0$; $d_0 = 3v_* + 5\eta_* + \gamma_0 + \chi_* \xi_*$;

$$v_* = \gamma/(\Gamma_P \sigma_*); \quad \xi_* = k_*^2 V_s^2 \tau_n/(\Gamma_P \sigma_*); \quad \gamma_* = \kappa_{||}^e \gamma_0 \sigma_*/(V_s^2 \tau_n);$$

$$\eta_* = \xi_*/(1 + \gamma \tau_n).$$

Выразив $\tilde{\omega}$ с помощью (2.26) и подставив в (2.25), получим уравнение для \tilde{u} :

$$\begin{aligned} \frac{D_\perp}{x_0^2} \frac{d^2\tilde{u}}{ds^2} + \frac{\Gamma_P}{n} \frac{\gamma_n}{x_0} \frac{d\tilde{u}}{ds} - \Gamma_P \beta u (v_* + \eta_* - 1) + \\ + \Gamma_P \frac{\tilde{T}}{T_P} [\gamma_T - (\eta_* - \gamma_\sigma) \beta u] - \tilde{\Gamma}_P = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Результаты. Коэффициенты, входящие в уравнение (2.30) и зависящие от невозмущенных параметров плазмы, разложим в ряд по степеням s с точностью до первого члена, воспользовавшись соотношениями (2.20), (2.21). При $\gamma_n = \gamma_T = 0$, $e^{-\beta u} \simeq 1$, $u \simeq s^2/\beta$ (2.30) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\tilde{u}}{ds^2} - k_\delta^2 \tilde{u} - \frac{2}{\sigma_*} \left[(\eta_* - \gamma_\sigma) \frac{\tilde{T}}{T_P} s^2 + \frac{\tilde{\Gamma}_P}{\Gamma_P} \right] = 0, \quad (2.31)$$

где $k_\delta^2 = 2(v_* + \eta_* - 1)$.

Подставляя решение (2.31) в граничные условия, получаем характеристическое уравнение, связывающее γ и k_* :

$$k_{\delta}^2 \operatorname{ch} k_{\delta} = \frac{2(\operatorname{ch} k_{\delta} - 1)a_1 + a_2 k_{\delta}^2}{a_1 + a_2 - (\nu_* + \eta_* - 1)/(\eta_* - \gamma_{\delta})}. \quad (2.32)$$

Оно имеет решения только с действительными ν_* , так что рассматриваемая неустойчивость носит аperiодический характер, поскольку отсутствуют процессы, аналогичные действию возвращающей силы в осцилляторе.

Границы неустойчивости определяются уравнением $k_{\delta}^2 = 2(\xi_* - 1)$. Один из корней $k_{\delta,1} = 0$ и ему соответствует возмущение, тождественно равное нулю. При $0 \leq k_{\delta} \leq 1$ правая часть (2.32) растет с k_{δ} быстрее, чем левая, а при $k_{\delta} \geq 1$ ситуация меняется на обратную. Поэтому существует корень (2.32) $k_{\delta,2} \approx 1$. Третий корень (2.32) есть в силу того, что знаменатель правой части обращается в нуль при $\xi_* = \xi_{*m}$, удовлетворяющем условию

$$\frac{5\xi_{*m} + \gamma_0}{5\xi_{*m} + \gamma_0 + \chi_* \xi_{*m}} = \frac{\xi_{*m} - 1}{\xi_{*m} - \gamma_{\sigma}}.$$

Для условий пристеночной плазмы $\chi_* \ll 1$, так как $\chi_* \sim T_{pl}^{3/2}$. Учитывая это, получаем:

$$\xi_{*m} \approx (5/\chi_m)(1 - \gamma_{\sigma}); \quad k_{\delta,3} \approx \sqrt{10(1 - \gamma_{\sigma})/\chi_*}. \quad (2.33)$$

При $k_{\delta,2} < k_{\delta} < k_{\delta,3}$ инкремент возмущений положителен. Волновые числа $k_*^{\min, \max}$, соответствующие нижней и верхней границам неустойчивости, можно оценить на основе следующих качественных соображений. Возмущения нарастают, если скорость притока плазмы вдоль магнитного поля превышает скорость рассасывания за счет поперечной диффузии.

Так как $V_{\parallel} \sim V_s^2 k_* \tau_n$, характерное время „подпитки“ возмущения $\tau_+ \sim 1/(k_* V_{\parallel}) \sim 1/(V_s^2 k_*^2 \tau_n)$. Для характерного времени рассасывания имеем $\tau_- \sim x_0^2/D_{\perp} \sim 1/(\sigma_* \Gamma_p)$. Условие роста возмущений $\tau_+ < \tau_-$ выполняется при $k_* > k_*^{\min} \approx \sqrt{\Gamma_p \sigma_*/(V_s^2 \tau_n)}$. Верхняя граница неустойчивости соответствует коротковолновым возмущениям, которые стабилизируются продольной теплопроводностью плазмы: $k_*^{\max} \approx \sqrt{\gamma_0 \Gamma_p / (\chi_{\parallel}^e \lambda_0)}$. Поскольку в условиях пристеночной плазмы χ_{\parallel}^e мало, k_*^{\max} может значительно превышать k_*^{\min} .

По порядку инкремент нарастания неустойчивых возмущений с $k_*^{\min} < k_* < k_*^{\max}$ равен $\gamma_* = \Gamma_p \sigma_* \approx D_{\perp} \nu_0^2 \sigma_*^2$.

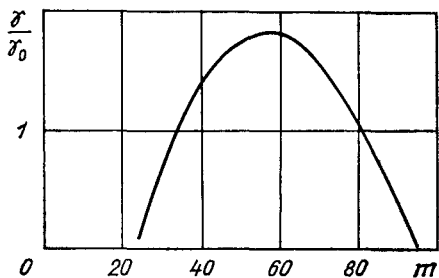


Рис. 9. Зависимость безразмерного инкремента двумерных полоидальных возмущений от номера моды ($\gamma_* = 2,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$)

Рисунок 9 демонстрирует зависимость величины χ/χ_* от номера моды чисто полоидальных возмущений, для которых $k_* = m \sin \psi/a$. Расчет сделан для параметров установки реакторного масштаба: $q_0 = 20 \text{ Вт/см}^2$, $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $D_{\perp} = 1 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $a = 150 \text{ см}$. Неустойчивость развивается в широком диапазоне значений m . Длина волны возмущений, соответствующих максимальному χ , $\lambda_{\max} \approx 15 \text{ см}$.

Развитие данной неустойчивости в пристеночной области энергетического реактора-токамака может привести к усилению эрозии стенки в областях повышения температуры, возникновению неоднородной тепловой нагрузки. Неустойчивость подавлена при $T_p \ll I_H$ из-за сильной зависимости сечения ионизации от температуры. Это видно из (2.33): с ростом $\gamma_{\sigma} k_{\delta,3}$ убывает.

2.4. Турбулентный плазменный бланкет

Из результатов предыдущего параграфа следует, что усиление рециклинга на стенке приводит к уменьшению температуры пристеночной плазмы. При этом падает эрозия стенки и снижается поступление примесей. Тем самым задача контроля примесей в реакторе-токамаке может быть в принципе решена без создания диверторной конфигурации. Распределение теплового потока по большой поверхности стенки позволило бы избежать трудностей эксплуатации рабочих поверхностей лимитеров и диверторных пластин в условиях сильно концентрированных тепловых нагрузок.

Усиления рециклинга на стенке можно добиться за счет увеличения коэффициента поперечной диффузии в пристеночной области. Эта идея была положена в основу концепции турбулентного плазменного бланкета (ТПБ), предложенной в [27]. Необходимый уровень D_{\perp} для создания эффективного ТПБ может быть оценен из следующих соображений. В реакторе-токамаке наиболее опасны в отношении эрозии стенки ионы трития. Их энергия с учетом ускорения в амбиполярном скачке потенциала $E_i \approx 3T_p$ не должна превышать порог распыления

материала стенки E_t . Например, в случае стенки из нержавеющей стали $E_t \approx 23$ эВ. Если принять $q_0 = 25$ Вт/см², $n_0 = 10^{14}$ см⁻³, то согласно рис. 7 $D_w \geq 4$ м²/с. Такой уровень поперечной диффузии значительно превышает боровский и необходимы какие-либо специальные меры для его поддержания.

Помимо ограничения на безопасном уровне поступления примесей способ организации процессов на периферии разряда в термоядерном реакторе должен обеспечивать решение задач вывода несгоревшего топлива и гелиевой золы. Обсудим принципиальную возможность вывода водорода при реализации ТПБ [32]. Вопрос о выводе гелия рассматривается в гл. 5.

При рециклинге плазмы на первой стенке в результате перезарядки и диссоциации молекул и молекулярных ионов формируется поток атомов, направленный к стенке. Часть этого потока может выводиться из рабочей камеры в систему откачки через специальные отверстия в первой стенке. В дальнейшем атомы термализуются на стенках и рекомбинируют в молекулы. В стационарном состоянии в системе откачки установится плотность газа n_g , которая определяется удельным потоком несгоревшего топлива из реактора Γ_0 и объемной скоростью откачки \dot{V} :

$$n_g = \Gamma_0 S_0 / (2\dot{V}),$$

где S_0 — площадь поверхности первой стенки.

Поток атомов из плазмы в отверстия уравновешен обратным потоком термализовавшихся молекул и частичной их откачкой

$$j_w S_1 = 2n_g (\dot{V} + v_g S_1/4),$$

где S_1 — площадь поверхности отверстий; v_g — тепловая скорость частиц газа.

Плотность потока атомов из плазмы находим из (2.4):

$$j_w = D_w n_0^2 \hat{\sigma} \rho_a^w,$$

где

$$\rho_a^w = \frac{\rho_m^w \xi_f (1 - R_E^f) + \rho_*^w}{(2 + \gamma_n) [\rho_0^w + \alpha_2 \beta^2 (1 - 1/z_2^2)]}.$$

Таким образом, необходимый для вывода несгоревшего топлива коэффициент поперечной диффузии дается соотношением

$$D_w = [\Gamma_0 / (n_0^2 \rho_a^w \hat{\sigma})] (S_0 / S_1 + v_g S_0 / 4\dot{V}).$$

Для реактора-токамака масштаба INTOR [34] ($\Gamma_0 \approx 3 \times 10^{15}$ см⁻²·с⁻¹, $n_0 \approx 10^{14}$ см⁻³, $S_0 \approx 330$ м², $\dot{V} \approx 3 \cdot 10^8$ см³/с) необходимый уровень D_w составляет $(4-5) \cdot 10^4$ см²/с, т. е. близок

к тому, который необходим для решения проблемы эрозии стенки.

Возможность реализации ТПБ при искусственном увеличении коэффициентов переноса в пристеночной области рассматривается в гл. 6.

2.5. Сравнение с экспериментом

Условия применимости. В современных токамаках без диверторов плазменный шнур ограничивается лимитерами той или иной конфигурации. В этом случае уравнения (2.10) можно использовать для расчета параметров плазмы, усредненных по магнитным поверхностям в периферийной области внутри магнитной поверхности, касающейся лимитера. Средние значения могут, вообще говоря, существенно отличаться от параметров вблизи лимитера. Причиной неоднородности является локализация источника заряженных частиц и стока энергии в результате ионизации нейтралов, возникающих при рекомбинации плазмы на лимитере. Однако в некоторых условиях неоднородность вдоль магнитного поля незначительна и представления, изложенные в настоящей главе, применимы к описанию периферийной области.

Заряженные частицы, появляющиеся при ионизации нейтралов, поступающих с лимитера, растекаются вдоль магнитного поля со скоростью V_{\parallel} , которая определяется перепадом давления плазмы $\Delta_{\parallel} P$ на магнитной поверхности:

$$V_{\parallel} \cong V_s \sqrt{\Delta_{\parallel} P / P}.$$

Пренебрегая диффузионным поперечным переносом плазмы вблизи лимитера из уравнения непрерывности, получаем

$$k_a n_a n \simeq n V_{\parallel} / (l_a), \quad (2.34)$$

где l_a — длина пробега атомов.

Если нейтралы не ионизируются в SOL, полный поток плазмы на лимитер не превышает потока в SOL Γ_s и $n_a \leq \Gamma_s / (v_a l_a L_0)$, где L_0 — длина контакта плазмы с лимитером; v_a — средняя скорость атомов. Для Γ_s примем оценку $\Gamma_s = \Gamma_{P,1} S_0$, где $\Gamma_{P,1}$ дается (2.17), а S_0 — площадь магнитной поверхности, касающейся лимитера. В результате из (2.34) имеем

$$\Delta_{\parallel} P / P \simeq (n_0 / n_0^*)^4,$$

где

$$n_0^* = \sqrt{\frac{2v_a}{k_i^a \sigma_*} \frac{L_0 V_s}{D_w S_0}}.$$

Следовательно, перепад давления вдоль магнитного поля можно считать малым, если выполнено условие

$$n_0 < n_0^*. \quad (2.35)$$

Полагая $v_a \approx 10^5$ см/с, для токамака масштаба JET ($S_0 = 200$ м², $L_0 \approx 50$ м) при $T_P \approx 50$ эВ, $D_w = 1$ м²/с получаем $n^*_0 \approx 5 \cdot 10^{13}$ см⁻³.

Перепад температуры вдоль магнитного поля в периферийной области $\Delta_{\parallel} T$ оценим, приравняв потери энергии на ионизацию нейтралов подводу тепла за счет продольной теплопроводности электронов:

$$q_{\parallel} / l_a \approx k_i^a n n_a / E_i^a,$$

где $q_{\parallel} \approx \kappa_{\parallel}^e \Delta_{\parallel} T / L_s$, $L_s \approx S_0 / L_0$ — длина силовой линии.

Плотность плазмы в области, где ионизируются первичные нейтралы, поступающие с лимитера, оценим, считая, что градиент плотности в периферийной области порядка $n_0 / x_0 \approx n^2_0 \sigma_*$:

$$n \approx n^2_0 \sigma_* l_a \approx n^2_0 \sigma_* v_a / (n l_a),$$

откуда $n \approx n_0 \sqrt{\sigma_* v_a / k_i^a}$.

Оценивая T_P из условия конвективности теплового потока (1.6), получаем

$$\Delta_{\parallel} T / T \approx 0,1 D_w^{4,5} L_s^2 n_0^{10} / q_0^{3,5}, \quad (2.36)$$

где D_w — в м²/с; L_s — в м; n_0 — в $5 \cdot 10^{13}$ см⁻³; q_0 — в Вт/см², откуда следует, что для токамака масштаба JET $\Delta_{\parallel} T / T_P \ll 1$ вплоть до $n_0 = n^*_0$.

При выводе (2.35) было использовано условие прозрачности SOL для нейтралов, которое может быть записано в виде

$v_a / k_i^a > \int_{x_w}^0 n dx$. Линейную плотность в SOL оценим, считая,

что весь поток частиц из периферийной области выходит на лимитер: $\Gamma_s \approx L_0 \int_{x_w}^0 n V_s dx$. В результате условие прозрачности сводится к (2.35).

Таким образом, при выполнении условия (2.35) периферийная область токамака с лимитером может описываться так же, как и в случае рециклинга на стенке. V_w может быть найдено из баланса частиц в SOL: $\Gamma_s = n_s V_s L_0 \delta$, где n_s — плотность плазмы в SOL; $\delta \approx \sqrt{D_s L_s / V_s}$ — характерная ширина SOL; D_s — коэффициент поперечной диффузии в SOL. Следовательно, $V_w = \sqrt{V_s D_s / L_s}$.

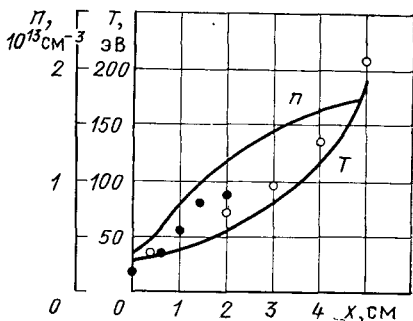
Данные экспериментов. При $\gamma_n = \gamma_T = 0$ из (1.9а) и (2.15) следует $n_s \sim n^2_0 \sim \bar{n}^2$. Близкая по характеру зависимость между плотностью плазмы в лимитерном слое и средней плотностью в токамаке получена на установках Т-10 [35], JET. В JET также обнаружена зависимость $T_P \sim \bar{n}^{-2}$ [36], следующая из (2.16).

Рис. 10. Профили параметров плазмы в ТЕХТ:

● — плотность; ○ — температура — данные измерений [37]; кривые — результаты расчета

На рис. 10 представлены измеренные профили температуры и плотности плазмы в пристеночной области токамака ТЕХТ [37] и зависимости, рассчитанные по формулам (2.21), (2.24). Согласно [37] при расчете принималось $q_0 = 2$ Вт/см², $\bar{n} = 4 \cdot 10^{13}$ см⁻³, $n_0 = 0,75\bar{n}$, $D_{\perp} = A_D/n$, $A_D = 10^{17}$ см⁻¹·с⁻¹, $\alpha_{\text{ж}} = 4$, $D_s = 1$ м²/с, $L_s = 3$ м; относительно первичных атомов предполагалось, что их энергия мала по сравнению с T_p . Отметим, что помимо удовлетворительного совпадения экспериментальных и расчетных профилей параметров имеется согласие между измеренным и вычисленным значением времени жизни частиц в разряде $\tau_p \equiv \bar{n}a / (2\Gamma_p)$: 8 и 7,6 мс соответственно.

Развитием неустойчивости, описанной в § 2.4, возможно, объясняется «полосатая» структура свечения нейтралов водорода в периферийной области токамака TFTR [38] в разрядах, когда плазма контактировала с поверхностью бампер-лимитера. Длина волны в полоидальном направлении у структуры порядка 10 см, что согласуется с величиной λ_m , полученной в § 2.4.



Глава 3

РОЛЬ РЕЦИКЛИНГА В КОНФИГУРАЦИИ С ДИВЕРТОРОМ

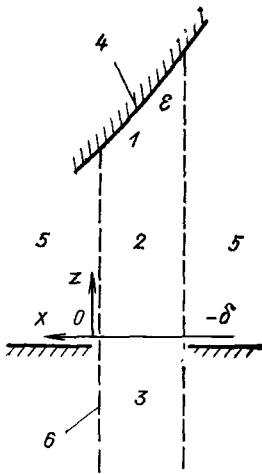
3.1. Характерные области SOL

В конфигурации с дивертором взаимодействие плазмы с материальной поверхностью — нейтрализационными пластинами — локализовано в специальном объеме. В него заряженные частицы попадают в результате поперечной диффузии через сепаратрису и последующего движения вдоль магнитного поля. Меридиональное сечение магнитных поверхностей в конфигурации с полоидальным дивертором, рассмотрением которого мы ограничимся, показано на рис. 3.

В SOL можно, до некоторой степени условно, выделить несколько областей, где поведение плазмы определяется различными физическими процессами.

Рис. 11. Конфигурация плазмы в диверторе:

1 — область рециклинга; 2 — область взаимодействия с газом; 3 — основная часть SOL; 4 — нейтронизационная пластина; 5 — камера откачки; 6 — сепаратриса; ε — угол между пластиной и магнитной поверхностью



Непосредственно к поверхности диверторной пластины примыкает область рециклинга (рис. 11), где в плазме присутствуют нейтралы, образующиеся при поверхностной рекомбинации. Толщина этой области (ξ_0) зависит от соотношения характерной ширины SOL (δ) и глубины проникновения нейтралов в плазму $l_* \approx 1/(n_r \sigma_*)$, где n_r — средняя плотность плазмы в области рециклинга. При $l_* > \delta$ нейтралы проходят слой без ионизации и покидают SOL на расстояниях от пластины порядка δ : $\xi_0 \approx \delta$. В случае $l_* < \delta$ реализуется состояние сильного рециклинга плазмы на пластине — вероятность ионизации нейтралов в SOL близка к 1 и поток ионов на поверхность значительно превышает поток нейтралов из слоя. В этом случае $\xi_0 \approx l_*$, как и при рециклинге плазмы на первой стенке.

Часть нейтралов, возникающих при поверхностной рекомбинации, проникает сквозь плазменный слой в диверторе и попадает в камеру откачки. Здесь они передают энергию стенкам, сорбируются на них и частично откачиваются. При конечной скорости откачки в камере накапливается нейтральный газ, который взаимодействует с плазмой.

В основной части SOL, вне диверторной камеры, поведение плазмы в основном определяется процессами переноса заряженных частиц вдоль и поперек магнитного поля. (В этой главе рассматривается ситуация, когда расстояние от сепаратрисы до первой стенки Δ настолько велико, что можно пренебречь взаимодействием плазмы со стенкой, в том числе и влиянием на плазму нейтралов, поступающих со стенки.)

3.2 Одномерное приближение для плазмы в диверторном объеме

Рассмотрим конфигурацию, когда длина силовой линии в диверторном объеме мала по сравнению с длиной линии в основной части SOL, что характерно для реальных устройств с диверторами. При этом профили плотности и температуры плазмы поперек магнитного поля формируются в основной части SOL и слабо меняются в диверторном объеме. В таком случае

для описания плазмы в диверторе можно использовать одномерное приближение, учитывающее переносы частиц, импульса и энергии только вдоль силовых линий магнитного поля. Стационарные уравнения одномерного приближения получаем, пренебрегая в уравнениях (1.1) — (1.3) производными в направлении x :

$$d(nV_{\parallel})/r'l = S_n; \quad (3.1)$$

$$d(m_i n V_{\parallel}^2 + 2nT)/dl = R_n; \quad (3.2)$$

$$dq_{\parallel}/r'l = -Q_n. \quad (3.3)$$

Граничные условия уравнений (3.1) — (3.3) на диверторной пластине ($l=L_s$) даются (1.5), (1.6); кроме того, заданы полные потоки частиц и тепла в диверторный объем:

$$\Gamma_0 = L_0 \int_{x_w}^0 nV_{\parallel} |_{l=L_d} \sin \psi d\lambda; \quad (3.4)$$

$$Q_0 = L_0 \int_{x_w}^0 q_{\parallel} |_{l=L_d} \sin \psi dx, \quad (3.5)$$

где $L_0 = 2\pi R_P m_P$ — суммарная длина диверторных каналов в тороидальном направлении; R_P — большой радиус области контакта плазмы с пластиной; m_P — число пластин (принято, что все они находятся в одинаковых условиях). В стационарном состоянии поток Γ_0 должен тем или иным образом откачиваться из диверторной камеры.

Угол ψ , который силовые линии составляют с тороидальным направлением, меняется с x . Далее это изменение не учитывается и ψ принимается постоянным, равным его значению вдали от сепаратрисы. Соответственно считаются не зависящими от x длины отрезков силовой линии в основной части SOL (L_d) и в диверторе $l_d = L_s - L_d$.

Для поперечных профилей параметров плазмы в диверторном объеме, не описываемых уравнениями (3.1) — (3.3), в [23, 39, 40] принималось приближение «ступеньки»: n , T не зависят от x в слое $-\delta \leq x \leq 0$, а вне его плазма отсутствует (см. рис. 11). В [23, 39] δ задавалось, а в [40] было связано с самосогласованно определяемыми характерными длинами спада плотности и температуры в основной части SOL.

Можно получить приближенные аналитические решения уравнений (3.1) — (3.3), позволяющие провести качественный анализ процессов в диверторной плазме.

Область рециклинга. Здесь условие изотермичности плазмы практически совпадает с условием применимости гидродинамики. В широком диапазоне параметров температура плазмы сла-

бо меняется по ширине области рециклинга. Перепад температуры в области $\Delta_r T$ оценим, приравняв поток тепла за счет продольной электронной теплопроводности его граничному значению:

$$\kappa_{\parallel}^e \Delta_r T / (l_* \sin \psi \sin \epsilon) \approx (\gamma_0 - 5) n_p T_p V_s^P,$$

где n_p , T_p — параметры плазмы у пластины; $V_s^P = \sqrt{2T_p/m_i}$. Отсюда условие малости отношения $\Delta_r T/T_p$ эквивалентно неравенству

$$\frac{n_p}{n_r} \frac{\gamma_0 - 5}{\sin \psi \sin \epsilon} \frac{V_s^P}{\sigma_* \kappa_{\parallel}^e} \ll 1. \quad (3.6)$$

Учитывая, что $n_p \leq n_r$ и полагая $\sin \psi \sin \epsilon = 0,1$, находим, что (3.6) выполняется при $T_p \geq 3 \text{ эВ}$. До тех пор, пока не будет оговорено особо, это условие считается выполненным и изменением T в области рециклинга пренебрегается.

При условии $T(l) = \text{const} = T_p$ один из интегралов уравнений (3.1), (3.2) находим аналитически, учитывая следующее. В конфигурации с полоидальным дивертором угол между магнитным полем и пластиной близок к 0 и согласно (1.25) R_n практически не зависит от скорости первичных нейтралов. Кроме того, глубина проникновения перезарядившихся атомов l_* значительно больше длины пробега первичных нейтралов, и в области рециклинга можно выделить две подобласти: подобласть, где сосредоточены первичные нейтралы, и подобласть, где происходит ионизация перезарядившихся атомов. В первой из них $n_* \ll \ll n_h \approx n_a$ и согласно (1.24), (1.25) имеем:

$$R_n = - [(1 - \beta^2)/\beta^2] m_i V_{\parallel} S_r.$$

Введем новые переменные $t_n = \ln(n/n_p)$, $y = (nV_{\parallel}/(n_p V_s^P))^2$. Из (3.1), (3.2) получаем уравнение

$$dy/dt_n = [y - \exp(2t_n)] \cdot 2\beta^2 / (1 - \beta^2),$$

решая которое, находим:

$$nV_{\parallel} = n_p V_s^P [(1 + \beta^2) (n/n_p)^{2\beta^2/(1+\beta^2)} - \beta^2 (n/n_p)^2].$$

Найдем связь потока плазмы на границе подобластей локализации первичных и перезарядившихся атомов, $(nV_{\parallel})_1$ с потоком на пластину. Для этого уравнение (1.20б) проинтегрируем по пространству скоростей. В результате получим

$$\partial j_{k,\xi} / \partial \xi + \partial j_{k,\eta} / \partial \eta = - (k^a_i + k_c) n n_h, \quad (3.7)$$

где $j_{k,\xi,\eta} \approx n_h v_h$ — составляющие потока первичных атомов. Характерный размер изменения $j_{k,\xi}$ по ξ не превышает l_* , а характерный размер изменения $j_{k,\eta}$ по η порядка $\delta \sin \epsilon$. В случае сильного рециклинга плазмы на пластине, который наиболее

интересен для нас, $l_* < \delta$ и вторым членом в левой части (3.7) можно пренебречь. Комбинируя (3.7) с уравнением непрерывности, для плазмы получаем

$$\partial n V_{\parallel} / \partial t = -\beta^2 \partial \left(\sum_k j_{k,\xi} \right) / \partial \xi.$$

Отсюда после интегрирования находим:

$$n_p V_s^P - (n V_{\parallel})_1 = \beta^2 \sum_k j_k^P / \sin \zeta.$$

Поток первичных атомов с пластины $\sum_k j_k^P$ связан с $n_p V_s^P$ через альбедо плазменного слоя A_l : $\sum_k j_k^P = n_p V_s^P \sin \zeta / (1 - A_l)$.

Таким образом, уравнение, связывающее n_p и плотность плазмы на границе подобласти локализации первичных атомов n_u , имеет вид:

$$(1 + \beta^2) \cdot (n_u / n_p)^{2\beta^2 / (1 + \beta^2)} - \beta^2 (n_u / n_p)^2 = 1 - \beta^2 / (1 - A_l). \quad (3.8)$$

При сильном рециклинге на пластине для A_l можно воспользоваться результатами гл. 2 для полубесконечной плазмы. Рассмотрим два предельных случая соотношения энергии первичных нейтралов и T_p :

1) при $E_k \ll T_p$ $A_l = 1 - \beta$. На рис. 12 кривая 1 дает зависимость отношения n_u / n_p от β , найденную из численного решения (3.8);

2) при $E_k = (3/2) T_p$ $A_l = (1 - \beta) / (1 + \beta)$. Зависимость n_u / n_p от β дается кривой 2 на рис. 12.

В обоих рассмотренных случаях величина n_u / n_p слабо меняется в широком диапазоне значений — $0,01 \leq \beta \leq 0,5$, который соответствует $T_p \geq 3 \text{ эВ}$. Поэтому в дальнейшем принимается $n_u / n_p \approx \text{const} = 2,5$.

Перейдем к рассмотрению подобласти локализации атомов, возникающих при перезарядке. Здесь можно пренебречь плотностью первичных нейтралов, тогда из (1.24), (1.25) следует, что

$$R_n = m_i V_{\parallel} S_n,$$

так что уравнение, связывающее переменные y , t_n , имеет вид

$$dy / dt_n = 2[y - \exp(2t_n)].$$

Интегрируя, получаем:

$$n = n_u \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(n V_{\parallel})_1}{n_u V_s^P} \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{V_{\parallel}}{V_s^P} \right)^2 \right\}. \quad (3.9)$$

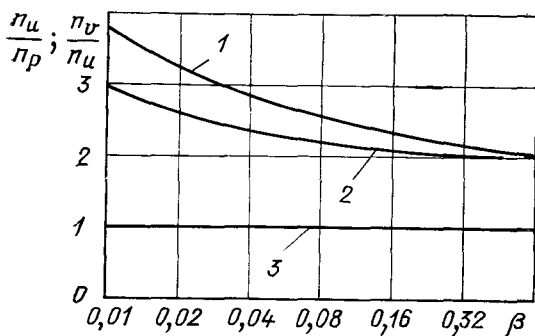


Рис. 12. Отношение плотностей плазмы на границе подобласти первичных нейтралов и у пластины в приближении холодных (1) и горячих (2) первичных атомов, на границе области рециклинга и подобласти первичных нейтралов (3)

Первый член в фигурных скобках преобразуем следующим образом: $\frac{1}{2} \left(\frac{n_p}{n_u} \right)^2 \left[\frac{(nV_{\parallel})_1}{n_p V_s^p} \right]^2 = \frac{(1-\beta)^2}{2} \left(\frac{n_p}{n_u} \right)^2$. Для второго члена имеем оценку: $(V_{\parallel}/V_s^p)^2 \ll [nV_{\parallel}/(n_p V_s^p)]^2$ и, следовательно, он пренебрежимо мал на границе области рециклинга.

Окончательно получаем следующее соотношение, связывающее плотность на границе области рециклинга n_v с n_p , n_u :

$$n_v = n_u \exp \left[\frac{(1-\beta)^2}{2} \left(\frac{n_p}{n_u} \right)^2 \right]. \quad (3.10)$$

Зависимость отношения n_v/n_u от β также представлена на рис. 12 (кривая 3). Во всем диапазоне значений β эта величина отличается от 1 не более чем на 5% в обоих рассмотренных случаях соотношения E_k и T_p .

Таким образом, плотность плазмы возрастает от n_p до $n_v \approx 2,5n_p$ в подобласти локализации первичных атомов (так как здесь градиент давления должен компенсировать силу трения ионов с атомами при перезарядке) и практически не меняется в подобласти ионизации атомов, возникших при перезарядке. Следовательно, средняя плотность плазмы в области рециклинга близка к $n_{u,v} : n_r = A_r n_p$, где $A_r \approx 2,5$. Учет процессов с участием молекул не приводит к сколько-нибудь существенному изменению соотношения между n_r , n_p .

Уравнение непрерывности (3.1) проинтегрируем по области рециклинга, учитывая, что из уравнений (1.20) следует

$$S_n = -\operatorname{div} \left(2j_m + \sum_k i_k + j_f + j_x \right). \quad (3.11)$$

При условии равенства нулю полного потока частиц на пластине получаем:

$$\Gamma_r = 2J_m^* + \sum_k J_k^* + J_f^* + J_x^*, \quad (3.12)$$

где Γ_r — поток плазмы в области рециклинга; $J_{m,k,f,*}^* = = L_0 \int j_{m,k,f,*;x} \Big|_{x=-\delta}^{x=0} dz$ — потоки нейтралов в области рециклинга из плазмы в камеру откачки.

Интегрируя уравнения баланса тепла (3.3) по области рециклинга, находим

$$Q_r = \gamma_0 \Gamma^P T_P + (J_2^P - J_2^*) E_i + (J_f^P + J_f^*) E_f^* + + (J_*^P + J_*^*) E_{i*} + [\Gamma^P - \Gamma_r - 2(J_m^P - J_m^*) E_i^a] + (J_m^P - J_m^*) E_i^n, \quad (3.13)$$

где Q_r — поток тепла в область; $\Gamma^P = L_0 \delta n_P v^P \sin \psi$, $J_{f,*}^P$ — интегральные потоки заряженных и нейтральных частиц на пластины; $J_{m,k}^P$ — потоки первичных атомов с пластин в плазму.

Величины $J^{*,P}$ должны определяться из рассмотрения нейтрального компонента в области рециклинга диверторного объема. Для этого в [23] было использовано приближение малого угла ε , который составляют диверторные пластины с магнитными поверхностями. При этом $d\xi \approx dx$, а производными функций распределения нейтралов по η в уравнениях (1.20) можно пренебречь, что позволяет использовать метод решения, описанный в § 2.2. Отметим, что величина ε ограничена снизу условиями применимости одномерного приближения для описания плазмы. Действительно, с $\varepsilon \rightarrow 0$ возрастает относительный вклад отброшенных в уравнениях (3.1) — (3.3) членов, учитывающих перенос частиц и тепла поперек магнитного поля. Оценки сверху этих членов можно получить, если использовать результаты гл. 2, где рассмотрен предельный случай магнитного поля, параллельного материальной поверхности: $\varepsilon = 0$. Согласно § 2.3 соответствующий член в уравнении непрерывности по порядку равен $D_{\perp} n_r / l_*^2$. Для члена в правой части уравнения (3.1) имеем оценку $V^P s n_P \sin \zeta / l_*$, т. е. поперечным переносом можно пренебречь, если выполнено условие

$$D_{\perp} n_r A_r \sigma_{*} / (V_s^P \sin \psi) \ll \sin \varepsilon. \quad (3.14)$$

Для оценок примем бомовский коэффициент при магнитном поле 5 Тл; $\sin \psi = 0,1$; $n_r = 10^{14} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$; $T_P = 10 \div 100 \text{ эВ}$; (3.14) выполняется при $\varepsilon \gg \varepsilon_0 = 0,05$. Расчеты, проведенные в [41], показали, что при нарушении условия (3.14) состояние с сильным рециклингом на диверторных пластинах не реализуется.

Для случая, когда с пластины в плазму поступают первичные атомы с энергией E_k , в приближении $\varepsilon \ll 1$ получены следующие соотношения для плотности и потока атомов:

$$n_a = n_p \sin \zeta \{ a_0 \exp[-\alpha(u - u_2)] +$$

$$+ a_+ \exp[-(u - u_z)] - a_- \exp[-(u_r - u)]; \quad (3.15)$$

$$j_{a,x} = n_p V_s^P \sin \zeta \cdot \beta [(a_0/\alpha) \exp[-\alpha(u - u_z)] + a_+ \exp[-(u - u_z)] + a_- \exp[-(u_r - u)], \quad (3.16)$$

где $u = \sigma_*(T_P) n_r x$, $u_r = \sigma_*(T_P) n_r \delta$, $u_z = \sigma_*(T_P) n_r z \operatorname{tg} \varepsilon$,
 $\alpha = (1/\beta) \sqrt{3T_P/(2E_k)}$, $a_{0,\pm} = b_{0,\pm}/b$;

$$b = 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1} \exp[-(\alpha + 1)(u_r - u_z)] + \\ + \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \exp[2(u_z - u_r)];$$

$$b_0 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(\alpha - \frac{1}{\beta} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \exp[2(u_z - u_r)] \right\};$$

$$b_+ = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \left\{ 1 + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1} \exp[-(\alpha + 1)(u_r - u_z)] \right\};$$

$$b_- = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \exp[-(u_r - u_z)] \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1} \exp[-(\alpha - 1)(u_r - u_z)] \right\}.$$

Плотность потока атомов, возникающих при перезарядке, на пластину равна

$$j_*^P = n_p V_s^P \frac{\sin \zeta}{2} \left[\frac{1 - \beta^2}{\alpha\beta - 1} a_0 + (1 - \beta) a_+ - (1 - \beta) a_- e^{u_z - u_r} \right]. \quad (3.17)$$

Для интегральных потоков нейтралов из области рециклинга в камеру откачки и на пластину

$$J^* = J_*^* + J_1^* = L_0 \int_0^{\delta \operatorname{tg} \varepsilon} j_{a,x} |_{x=-\delta} dz; \quad (3.18)$$

$$J_*^P = L_0 \int_0^{\delta \operatorname{ctg} \varepsilon} j_*^P |_{x=-z \operatorname{tg} \varepsilon} dz. \quad (3.19)$$

В двух рассмотренных ранее предельных случаях соотношения E_k и T_P интегралы в (3.18), (3.19) выражаются через элементарные функции:

1) при $E_k \ll T_P$, $\alpha = \infty$:

$$J^* = \Gamma^P \frac{2}{u_r} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} e^{-u_r} \right) \right]; \quad (3.18a)$$

$$J_*^P = \frac{\Gamma^P}{\beta} \left\{ 1 - \beta + \frac{1}{u_r} \ln \left[e^{-u_r} \left(\operatorname{ch} u_r + \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \operatorname{sh} u_r \right) \right] \right\}; \quad (3.19a)$$

2) при $E_k = (3/2) T_P$, $\alpha = 1/\beta$:

$$J^* = \Gamma^P \frac{2}{u_r \sqrt{1-\beta^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} e^{-u_r} \right) \right]; \quad (3.186)$$

$$J_*^P = \frac{\Gamma^P}{2\beta} \left\{ 1 - \beta + \frac{1}{u_r} \ln [e^{-u_r} (\operatorname{ch} u_r + \beta \operatorname{sh} u_r)] \right\}. \quad (3.196)$$

Как следует из приведенных соотношений, J^* , J_*^P не зависят явно от ε . Поэтому эти формулы дают правильные оценки для потоков нейтралов и при $\varepsilon \sim 1$, что будет показано в гл. 4, где рассмотрен случай $\varepsilon = \pi/2$.

Условия перехода к сильному рециклингу. Потоки заряженных частиц и тепла в область рециклинга Γ_r , Q_r определяются ниже из рассмотрения основной части SOL и области взаимодействия плазмы с газом. Здесь же, считая их параметрами, исследуем зависимость решений уравнений баланса частиц и тепла (3.12), (3.13) от величины Γ_r , Q_r . При этом удобно перейти к потокам, отнесенным к длине контакта плазмы с пластинами: $j_r = \Gamma_r/L_0$, $j_*^* = J^*/L_0$, $q_r = Q_r/L_0$.

В правой части (3.13) оставим только первый член, соответствующий передаче энергии заряженными частицами пластинам, что правомерно при $T_P \gg \bar{E}_i/\gamma_0 \approx 3 \div 4$ эВ. Используя определения Γ^P и u_r , из (3.13) находим:

$$u_r = q_r \frac{A_r}{\gamma_0 \sin \psi} \frac{\sigma_*}{V_s^P T_P}. \quad (3.20)$$

При фиксированном q_r u_r является функцией температуры, имеющей максимум: при малых T_P $u_r \sim \exp[-I_H/(2T_P)]$, при больших $u_r \sim T_P^{-3/2}$. Чтобы оценить максимальное значение u_r , u_r^{\max} , количественно, для константы ионизации используем формулу Томсона:

$$k_i^a = (\pi e^4 / I_H^2) \sqrt{8T_e / (\pi m_e)} \exp(-I_H/T_e).$$

Для константы перезарядки примем $k_c = \sigma_c \sqrt{2T/m_i}$, где $\sigma_c = 5 \cdot 10^{-15}$ см². Тогда

$$u_r^{\max} = 1,54 \frac{e^2}{I_H^{5/2}} \frac{m_i^{3/4}}{m_e^{1/4}} \sqrt{\sigma_c} \frac{q_r A_r}{\gamma_0 \sin \psi}.$$

Иследуем характер зависимости j^* от T_P при различных значениях u_r^{\max} :

1) $u_r^{\max} < 1$ (малые q_r). Из (3.18а), (3.18б) следует, что при всех $T_P j^* \approx \Gamma^P/L_0 \approx q_r/(\gamma_0 T_P)$ все нейтралы, возникающие при рекомбинации плазмы на пластине, проходят SOL без ионизации;

2) $u_r^{\max} > 1$ (большие q_r , малые ψ). И в этом случае при больших и малых T_P $u_r \ll 1$ и $j_r \approx q_r/(\gamma_0 T_P)$. Однако при T_P , близких к значению, соответствующему максимуму u_r , $j^* \approx$

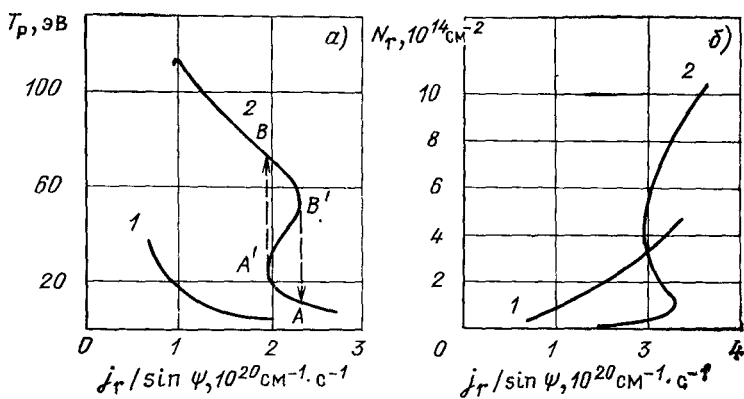


Рис. 13. Зависимость температуры (а) и плотности (б) плазмы в области рециклинга от $j_r / \sin \psi$:

1 — $q_r / \sin \psi = 2$ кВ/см; 2 — $q_r / \sin \psi = 12$ кВ/см

$\approx \Gamma^P / (L_0 u_r) \approx V_p^s \sin \psi / \sigma_* \sim \exp[I_H / (2T_p)] / \sqrt{T_p}$. Следовательно, при $T_p \geq I_H$ j^* возрастает с увеличением T_p , т. е. при $u_r^{\max} \geq 1$ зависимость $j^*(T_p)$ является немонотонной. Это означает, что в некотором интервале значений j_r температура в области рециклинга не определяется однозначно из равенства $j_r = j^*(T_p)$, которое следует из (3.12).

Качественные рассуждения, приведенные выше, иллюстрирует рис. 13, где показаны зависимости T_p и линейной плотности плазмы в области рециклинга $N_r = n_r \delta = u_r / \sigma_*$ от j_r , рассчитанные в [42] на основе численного решения уравнений (3.12), (3.13) для двух значений q_r . При большем q_r увеличение j_r выше некоторого критического значения приводит к скачкообразному переходу плазмы вблизи диверторных пластин в состояние с низкой температурой и высокой плотностью*. Он вызван тем, что из-за увеличения N_r с ростом j_r происходит запираение нейтралов в плазменном слое и их поток через боковую поверхность SOL в камеру дивертора, j^* , не может компенсировать j_r . Плотность плазмы вблизи пластин нарастает, а температура падает до тех пор, пока ситуация не стабилизируется уменьшением T_p до значения порядка потенциала ионизации атомов, когда достаточная проникаемость плазмы для нейтралов обеспечивается низкой константой ионизации. Новое состояние есть состояние с сильным рециклингом. Ему соответствует $u_r = \delta / l_* = \Gamma^P / \Gamma_r > 1$.

* Пороговый характер перехода, впервые обнаруженный в [23], был также показан в [143, 144]

Из сказанного выше следует, что состояния сильного рециклинга существуют при каких-либо значениях j_r , если $u^{\max}_r \geq 1$. т. е. q_r превышает критическое значение ($A_r = 2,5$; $\gamma_0 = 7,5$):

$$q_{кр} \approx 2 \frac{I_H^{5/2}}{e^2 \sqrt{\sigma_c}} \frac{m_e^{1/4}}{m_i^{3/4}} \sin \psi. \quad (3.21a)$$

При $q > q_{кр}$ переход к сильному рециклингу на пластине происходит при j_r больше

$$j_{кр} \approx \frac{I_H^{3/2}}{e^2 \sqrt{\sigma_c}} \frac{m_e^{1/4}}{m_i^{3/4}} \sin \psi. \quad (3.22a)$$

Для дейтерий-тритиевой смеси $q_{кр} \approx 2 \sin \psi$; $j_{кр} \approx 4 \cdot 10^{20} \sin \psi$, где $q_{кр}$ — в кВт/см, $j_{кр}$ — в $\text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$.

В [43] $q_{кр}$, $\gamma_{кр}$ были оценены из условия, что для реализации состояния сильного рециклинга длина пробега атомов до ионизации должна быть меньше δ . Это дает:

$$q_{кр} \approx 3 \frac{I_H^{7/2} \sqrt{m_e}}{e^4 m_i} \sin \psi; \quad (3.21b)$$

$$j_{кр} \approx 0,6 \frac{I_H^{5/2} \sqrt{m_e}}{e^4 m_i} \sin \psi. \quad (3.22b)$$

Числовые значения, даваемые (3.21b), (3.22b), близки к полученным из формул (3.21a), (3.22a). Таким образом, критические для перехода в состояние сильного рециклинга потоки частиц и тепла могут быть выражены через мировые константы.

На рис. 14 показано разбиение плоскости в координатах $j_r / \sin \psi$, $q_r / \sin \psi$ на области, в которых реализуются состояния с различной интенсивностью рециклинга, найденное на основе численного решения уравнений (3.12), (3.13).

Устойчивость состояний с сильным рециклингом. Нестационарные балансы частиц и тепла в области рециклинга имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta}{\sin \epsilon} \xi_0 n_r \right) &= j_r - j^*; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta}{\sin \epsilon} \xi_0 \cdot 3 n_r T_P \right) &= q_r - \gamma_0 n_P V_s^P T_P \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

На основе соображений, изложенных в § 3.1, для толщины области приближенно примем $\xi_0 \approx \delta l_* / (\delta + l_*)$.

Уравнения (3.23) линеаризуем вблизи положения равновесия по отношению к малым возмущениям параметров вида $n_r = n_r^0 + \tilde{n} \exp(\gamma t)$, $T_P = T_P^0 + \tilde{T} \exp(\gamma t)$, считая при этом q_r , j_r

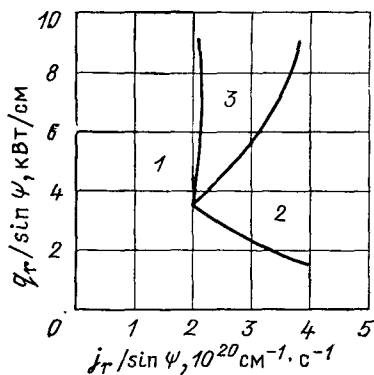


Рис. 14. Области состояний с различной степенью рециклинга:

1 — слабый рециклинг; 2 — сильный рециклинг; 3 — область неоднозначных параметров плазмы

постоянными. В результате, используя соотношение (3.186), в случае состояний с сильным рециклингом ($l_* \ll \delta, u_r \gg 1, j_r T_p \ll q_r$) находим выражение для инкремента:

$$\gamma = \frac{j_r \sigma_*}{\delta} \sin \varepsilon \cdot v_\sigma,$$

где
$$v_\sigma = \frac{d \ln \left[\frac{V_s^P}{\sigma_* \sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \right) \right]}{d \ln \sigma_*} \approx \frac{d \ln V_s^P}{d \ln \sigma_*} - 1.$$

Следовательно, устойчивы состояния с $v_\sigma < 0$, что соответствует $T_p \ll I_H$. Промежуточные состояния равновесия на рис. 13 с $v_\sigma > 0$, для которых $dT_p/dj_r > 0$, неустойчивы. Качественно причины неустойчивости состоят в следующем. Рассмотрим, например, случайное уменьшение температуры плазмы по сравнению с равновесной. В результате V_s^P , и, следовательно, поток плазмы на пластину и обратный поток нейтралов падают. Поскольку $v_\sigma > 0$, глубина проникновения нейтралов в плазму $l_* \sim 1/\sigma_*$ возрастает в меньшей степени, чем убывает Γ^P , и поток атомов из слоя плазмы уменьшается. За счет притока заряженных частиц из области взаимодействия с газом плотность плазмы вблизи пластины нарастает, а температура еще больше падает.

Важной особенностью состояний с сильным рециклингом является то, что скорость течения плазмы вдоль магнитного поля вне области рециклинга мала по сравнению со скоростью звука [39]:

$$V_{\parallel} / V_s = (\Gamma_r / n_r) n_p / \Gamma^P = 1 / (u_r A_r) \ll 1.$$

В этом случае давление слабо меняется вдоль магнитного поля, а перенос тепла обусловлен теплопроводностью электронов. Для отношения конвективного и кондуктивного потоков

тепла имеем оценку:

$$\frac{5nV_{\parallel}T}{\kappa_{\parallel}^e |\partial T/\partial l|} \approx \frac{nV_{\parallel}T}{\sqrt{m_i/m_e} n V_s \lambda_c T/L_s} \approx \frac{V_{\parallel}L_s}{V_s \lambda_c} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}},$$

т. е. оно мало при $V_{\parallel}/V_s \ll \sqrt{m_i/m_e} \lambda_c/L_s$.

Область взаимодействия плазмы с газом. В области взаимодействия плазмы с газом реализуется одна из двух возможных ситуаций: а) взаимодействие с нейтралами не приводит к существенному изменению теплового потока в SOL вдоль магнитного поля, и он в основном передается заряженными и нейтральными частицами пластинам; б) значительная часть теплового потока Q_0 , который поступает в дивертор, рассеивается в результате элементарных процессов с участием нейтралов, поступающих из газа. Последняя ситуация, получившая название *газовой мишени*, рассмотрена в § 3.6.

Диссипация теплового потока в области взаимодействия с газом незначительна, если $\Gamma_g E^a_i \ll Q_0$, где Γ_g — изменение потока частиц плазмы за счет ионизации газа. В этом случае из уравнения (3.3) следует, что $q_{\parallel} \approx -\kappa_{\parallel}^e \partial T/\partial l = Q_0/(L_0 \delta \sin \psi)$.

Отсюда

$$T = [T_p^{7/2} + T_*^{7/2} (L_s - l)/l_d]^{2/7}, \quad (3.24)$$

где $T_*^{7/2} = (7/2)Q_0 l_d/(L_0 \delta \sin \psi \cdot A_x)$; $A_x = \kappa_{\parallel}^e / i^{5/2} \approx 10^{20} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{эВ}^{-5/2}$.

Для параметров реактора-токамака масштаба ИНТОР [34] $T_* \approx 40$ эВ. Если $T_p \geq T_*$, то температура плазмы в диверторе всюду близка к T_p . При сильном рециклинге на пластине $T_p \leq I_H \ll T_*$. Однако и в этом случае за исключением лишь незначительного участка вблизи $l=L_s$ изменение T в диверторном объеме невелико. Например, значения температуры при $l=L_s - l_d/4$ и $l=L_d$ различаются не более чем в 1,5 раза. Поэтому с неплохой точностью температуру плазмы в области взаимодействия с газом можно считать постоянной и равной ее значению на входе в дивертор:

$$T_d = [T_p^{7/2} + T_*^{7/2}]^{2/7}. \quad (3.25)$$

Для плотности из постоянства давления имеем:

$$n \approx n_d = n_r T_p / T_d. \quad (3.26)$$

Нейтральный компонент в плазме в области взаимодействия с газом описывается с учетом того, что длина слоя в диверторе l_d велика по сравнению с δ . В [44] для случая SOL, окруженного в диверторном объеме с двух сторон атомарным газом с плотностью n_g и температурой T_g , получено распределение плот-

ности и потока атомов в плазме:

$$\left. \begin{aligned} n_a &= \frac{j_g}{v_i} \langle c_g \{ \exp(-\alpha u) + \exp[\alpha(u - u_d)] \} + \\ &\quad + c_* [\exp(-u) + \exp(u - u_d)] \rangle, \\ j_{a,x} &= j_g \langle (\beta/\alpha) c_g \{ \exp(-\alpha u) - \exp[\alpha(u - u_d)] \} + \\ &\quad + \beta c_* [\exp(-u) - \exp(u - u_d)] \rangle, \end{aligned} \right\} (3.27)$$

где

$$c_g = \frac{\alpha(\alpha^2\beta^2 - 1)}{(\alpha^2 - 1)\beta}; \quad c_* = \frac{\alpha(1 - \beta)}{(\alpha^2 - 1)\beta} \frac{1 + \alpha\beta + (1 - \alpha\beta)\exp(-\alpha u_d)}{1 + \beta + (1 - \beta)\exp(-d)},$$

$u = n_d \sigma_*(T_d) x$; $u_d = n_d \sigma_*(T_d) \delta$; $\alpha = (1/\beta) \sqrt{T_d/T_g}$; $j_g = n_g v_g / 4$ — удельный поток атомов, падающих на слой плазмы из газа, $v_g = \sqrt{8T_g/(\pi m_i)}$.

В [23] рассмотрена ситуация, когда в плазму из камеры откачки поступают молекулы с температурой стенок T_w . Предполагалось, что плазменный слой непрозрачен как для молекул, так и для франк-кондоновских атомов, т. е. выполнено условие $n_d \delta > v_i / (k_a^i + k_c) \approx 10^{13} \text{ см}^{-2}$. В этом случае j_g , фигурирующий в (3.27), находится из следующих соображений. При попадании молекулы в плазму в результате диссоциации и ионизации (с последующей «мгновенной» диссоциацией молекулярного иона) возникает $k^{m_i} / (k^{m_i} + k_d)$ атомарных ионов и $(2k_d + k^{m_i}) / (k^{m_i} + k_d)$ франк-кондоновских атомов.

Скорости атомов направлены хаотично и их длина пробега в плазме значительно больше длины пробега молекул. Следовательно, половина франк-кондоновских атомов будет выходить обратно в газ, а половина — двигаться вглубь плазменного слоя. Таким образом, имеем: $j_g = n_g v_g s_g / 4$; $s_g = (k_d + k^{m_i} / 2) / (k_d + k^{m_i})$.

Интегрируя уравнение непрерывности (3.1) по области взаимодействия с газом, получаем

$$\Gamma_r = \Gamma_0 + \Gamma_g, \quad (3.28)$$

где $\Gamma_g = S_e n_g \dot{v}_g \rho_g / 4$; $\rho_g = 2(1 - s_g) + s_g \beta_d \frac{1 - (1 - \beta_d) e^{-u_d}}{1 + (1 - \beta_d) e^{-2u_d} / (1 + \beta_d)}$,

$S_e = L_0 l_d \sin \psi$ — поверхность SOL в диверторе, открытая для контакта с газом, $\beta_d = \beta(T_d)$.

3.3. Плазма в основной части диверторного слоя

Средние параметры и длины спада. При сильном рециклинге плазмы на диверторных пластинах, когда кондуктивный перенос тепла является основным, стационарные уравнения не-

прерывности и баланса тепла в основной части SOL имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-D_{\perp} \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \frac{\partial n V_{\parallel}}{\partial t} = 0; \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\kappa_{\perp} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\kappa_{\parallel}^e \frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.30)$$

Приближенные решения уравнений (3.29), (3.30) ищем в виде $n = \hat{n}(l) \exp(-|x|/\delta_n)$, $T = \hat{T}(l) \exp(-|x|/\delta_T)$, который учитывает спад плотности, температуры в SOL поперек магнитных поверхностей из-за выноса частиц и тепла вдоль них в диверторный объем.

Интегрируя (3.30) по x в пределах от 0 до ∞ , получаем уравнение для температуры плазмы на сепаратрисе [45]:

$$d^2 \hat{T}^{7/2} / dl^2 = 49 Q_0 (4 S_0 A_x \delta_T).$$

Его решение с граничными условиями (1.7) и $\hat{T}|_{l=L_d} = T_d$ имеет вид:

$$\hat{T} = [T_d^{7/2} + T_{**}^{7/2} (1 - l^2/L_d^2)]^{2/7}, \quad (3.31)$$

где $T_{**}^{7/2} = 49 Q_0 L_d^2 / (8 S_0 A_x \delta_T)$.

Плотность плазмы в основной части SOL

$$\hat{n} = n_d T_d / \hat{T} = n_r T_P / \hat{T} = N_r T_P / (\delta \hat{T}). \quad (3.32)$$

Для средних параметров на сепаратрисе $\langle \hat{n} \rangle$, $\langle \hat{T} \rangle$. $\left(\langle \dots \rangle = \int_0^{L_d} \dots dl / L_d \right)$

$$\langle \hat{T} \rangle \approx T_0 (1 - 0,1\alpha_0 - 0,02\alpha_0^2); \quad (3.33)$$

$$\langle \hat{n} \rangle \approx (N_r / \delta) (T_P / T_0) (1 + 0,1\alpha_0 + 0,03\alpha_0^2), \quad (3.34)$$

где $T_0 = (T_d^{7/2} + T_{**}^{7/2})^{2/7}$; $\alpha_0 = (T_{**} / T_0)^{7/2}$.

Из уравнений (3.29), (3.30) следует $\delta_n / \delta_T \approx Q_0 D_{\perp} n_l / (\Gamma_0 \kappa_{\perp} T)$, т. е. при сильном рециклинге в диверторе $\delta_T \ll \delta_n$ и характерная ширина SOL определяется длиной спада температуры. Интегрируя (3.30) по x и l , получаем [40]:

$$\delta_T = \frac{S_0}{Q_0 L_d} \int_0^{L_d} \kappa_{\perp} \hat{T} dl, \quad (3.35)$$

что с $\kappa_{\perp} = \alpha_x D_{\perp} n$ и D_{\perp} в виде (2.12) дает

$$\delta_T = \left\{ \varphi_1 \left(\frac{49}{8} \frac{L_d^2}{A_x} \right)^{2(\gamma_T - \gamma_n)/7} (N_r T_P)^{1 + \gamma_n} \alpha_x D_0 \times \right.$$

$$\times \left(\frac{S_0}{Q_0} \right)^{1-2(\tau_T-\tau_n)/7} \left\{ \right\}^{1/(2+2\tau_T/7-5\tau_n/7)}, \quad (3.36)$$

где $\varphi_1 = \int_0^1 (1 - \xi^2)^{2(\tau_T-\tau_n)/7} d\xi$.

Рассмотрим в качестве примера случай $D_{\perp} = D_0 = \text{const}$ ($\gamma_n = \gamma_T = 0$). С учетом (3.20) из (3.36) находим

$$\delta_T = \sqrt{\frac{A_r \alpha_x}{\gamma_0} \frac{D_{\perp} L_d}{V_s^P}} \approx \sqrt{\frac{D_{\perp} L_d}{V_s^P}}, \quad (3.37)$$

что совпадает с обычно используемой оценкой для δ_n , справедливой в случае слабого рециклинга (см. § 4.2). Существенное отличие состоит в том, что в (3.37) V_s вычисляется при температуре плазмы вблизи пластин, которая при сильном рециклинге значительно ниже среднего значения T в SOL.

Таким образом, формулы (3.36), (3.37) можно использовать для расчета характерной ширины SOL в случаях как сильного, так и слабого рециклинга плазмы на диверторных пластинах. Вообще говоря, в последней ситуации длина пробега заряженных частиц в SOL, как правило, сравнима с L_d , и гидродинамическое описание плазмы неприменимо. Тем не менее (3.31), (3.32) можно использовать для определения параметров плазмы в SOL и в этом случае. Поскольку при слабом рециклинге поток частиц в диверторе меняется незначительно ($\Gamma^P \approx \Gamma_0$), $T_P \approx Q_0/(\gamma_0 \Gamma_0)$. В то же время $\langle \hat{T} \rangle \ll Q_0/(5\Gamma_0)$, так как в поток тепла через сепаратрису некоторый вклад дает поперечная теплопроводность. Поскольку γ_0 численно близко к 5, $\langle \hat{T} \rangle \approx T_P$. Итак, температура плазмы незначительно меняется в SOL при слабом рециклинге. Этот же результат следует и из (3.31). Так как $A_x T_d^{7/2} = 3,16 n_d \sqrt{m_i/m_e} \lambda_c V_s T_d$, $Q_0 = \gamma_0 n_d V_s T_d \delta S_0/L_d$, отношение первого и второго членов в (3.31) по порядку равно λ_c/L_d . При $\lambda_c \geq L_d$ (3.31) дает отличие \hat{T} от T_d не более чем на 20%.

На основе описанной выше модели или близких к ней были проведены расчеты параметров плазмы в диверторном объеме и основной части SOL реактора-токамака масштаба INTOR. На рис. 15 представлены зависимости плотности и температуры плазмы вблизи диверторных пластин и в основной части SOL от скорости откачки в диверторной камере \dot{V} .

Было принято: $Q_0 = 80$ МВт; $\Gamma_0 = 10^{22}$ с⁻¹; $S_0 = 350$ м²; $L_s = 40$ м; $m_P = 2$; $\sin \psi = 0,1$; $l_d = 5$ м. Плотность молекулярного газа в камере откачки определяется из условия стационарности: $\Gamma_0 = 2n_g \dot{V}$.

При реакторных параметрах переход в состояние сильного

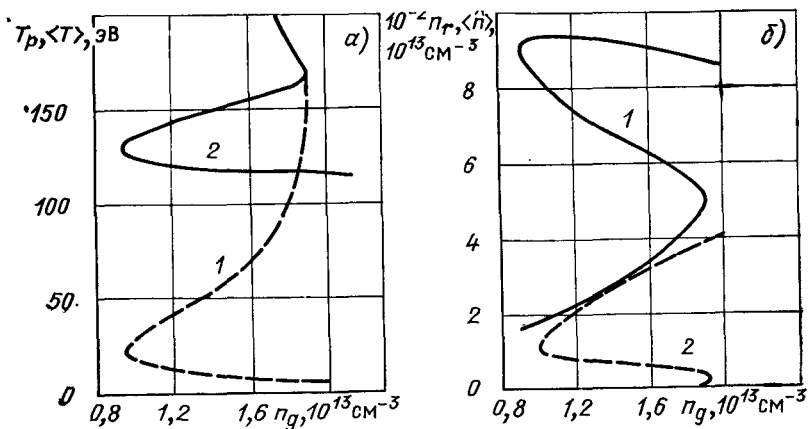


Рис. 15. Зависимость температуры (а) и плотности (б) плазмы вблизи диверторных пластин (1) и в основной части SOL (2) реактора-токамака от давления газа в камере откачки

рециклинга происходит с уменьшением скорости откачки до $5 \cdot 10^8 \text{ cm}^3/\text{с}$. Он сопровождается многократным уменьшением температуры пристеночной плазмы, увеличением ее плотности. Характерная ширина SOL возрастает в несколько раз как $T^{-1/4}_p$. Резкое уменьшение энергии ионов, бомбардирующих поверхность пластин, приводит к падению на несколько порядков поступления примесей в плазму. Подробнее этот вопрос рассматривается в гл. 5. Увеличение δ снижает удельную тепловую нагрузку на пластины, а уменьшение $\langle \hat{T} \rangle$ — энергию перезарядившихся атомов, бомбардирующих первую стенку. Оценки показывают, что учет нелокальных эффектов в электронном теплопереносе вдоль магнитного поля приводит к увеличению $\langle \hat{T} \rangle$ и уменьшению $\langle \hat{n} \rangle$ в 1,2—1,5 раза.

Характер течения плазмы в SOL. Течение плазмы в SOL при сильном рециклинге может иметь весьма сложный характер. В этом случае источник заряженных частиц в диверторном объеме за счет ионизации нейтралов, поступающих из камеры откачки, значительно превышает Γ_0 . Он локализован вблизи поверхности контакта плазмы с газом в слое толщиной порядка длины проникновения нейтралов, которая мала по сравнению с δ . В результате возникает градиент давления, заставляющий плазму растекаться в обоих направлениях вдоль магнитного поля — к пластине и из диверторного объема в основную часть SOL [46].

Картину течения плазмы в SOL характеризует распределение числа Маха $M = V_{\parallel}/V_s$ на входе в диверторный объем ($l = L_d$). В предположении, что с пластины и из газа в плазму поступают атомы с температурами T_w и T_g соответственно, ин-

тегрируя (3.1) с учетом (3.16), (3.27), получаем

$$M(s) = \sqrt{T_d/T_P} \{1 - \beta_r u_r s [a_0 \exp(-\alpha_r u) + a_+ \exp(-u) - a_- \exp(u - u_r)]\} / A_r - \overline{M} \beta_d \cdot (u_d/\omega_v) \cdot \langle c_g \{ \exp(-\alpha_g \omega) + \exp[\alpha_d(\omega - u_d)] \} + c_* [\exp(-\omega) + \exp(\omega - u_d)] \rangle, \quad (3.38)$$

где $s = x/\delta$; $\alpha_{r,d} = (1/\beta_{r,d}) \sqrt{T_{P,d}/T_{w,g}}$; $\beta_{r,d} = \beta(T_{P,d})$; $u = n_r \sigma_*(T_P) x$
 $\omega = n_d \sigma_*(T_d) x$; $\overline{M} = \int_{-1}^0 M(s) ds$; $\omega_v = \delta \dot{V} / (\zeta_l \sigma_g \rho_g)$.

На рис. 16 представлена зависимость $M(s)$, построенная для параметров INTOR в случае $\omega_v = 0,15$, который соответствует $\dot{V} = 3 \cdot 10^8 \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. В большей части слоя скорость течения значительно меньше скорости звука. Однако вблизи поверхностей плазмы, контактирующей с газом, заряженные частицы с $V_{\parallel} \sim V_s$ уходят из диверторного объема. Это течение проникнет в основную часть SOL на расстояние порядка $L_* \approx \approx \delta V_s / D_{\perp} \gg L_d$ прежде, чем произойдет его перемешивание с основным потоком за счет поперечного переноса. Более подробный анализ этого эффекта требует последовательного двумерного описания плазмы в SOL.

Автоколебания диверторной плазмы между состояниями с сильным и слабым рециклингом. Неоднозначность зависимости параметров плазмы в SOL от плотности газа в камере откачки может приводить к возбуждению автоколебаний между состояниями с сильным и слабым рециклингом плазмы на пластине. Качественная картина этих колебаний следующая. Из-за неустойчивости промежуточного состояния с сильным рециклингом, соответствующего участку кривой $T_P(j_r)$ с $dT_P/dj_r > 0$, рассмотренной в § 3.2, при квазистационарном изменении j_r плазма в области рециклинга эволюционирует либо по высокотемпературной, либо по низкотемпературной ветви кривой. С приходом в состояние с $dT_P/dj_r = \infty$ происходит скачкообразный переход с одной ветви кривой на другую. Изменение параметров плазмы в области рециклинга в результате такого перехода приводит к изменениям градиентов давления и температуры в основной части SOL, которые определяют потоки частиц и тепла в

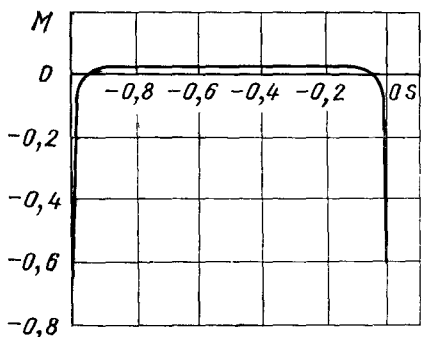


Рис. 16. Профиль числа Маха на входе в дивертор реактора-токамака

область рециклинга. Например, если плазма вблизи пластины перешла в состояние с низкой температурой и высокой плотностью, то ее давление здесь возрастает, поток частиц в область рециклинга из основной части SOL начинает уменьшаться и плазма эволюционирует по участку AA' (рис. 13). С приходом в точку A' происходит перескок в состояние B , давление у пластин падает и поток в область рециклинга возрастает — имеет место эволюция по участку BB' . В дальнейшем описанная картина повторяется.

Интегрируя уравнения (1.1)–(1.3) по основной части SOL и области взаимодействия с газом, получаем:

$$\left. \begin{aligned} S_0 \frac{d}{dt} \delta \langle \hat{n} \rangle &= \Gamma_g + \Gamma_0 - L_0 j_r; \\ L_s m_i \frac{d}{dt} \langle \hat{n} \hat{V}_{\parallel} \rangle &= 2(n_s T_s - n_r T_P) - m_i n_r V_{\parallel, r}^2; \\ S_0 \frac{d}{dt} 3\delta \langle \hat{n} \hat{T} \rangle &= Q_0 - L_0 \left[j_r \left(5T_P + \frac{m_i}{2} V_{\parallel, r}^2 \right) + q_{\parallel, r}^* \delta \sin \psi \right], \end{aligned} \right\} (3.39)$$

где $n_s = \hat{n}|_{l=0}$; $T_s = \hat{T}|_{l=0}$; $V_{\parallel, r} = j_r / (\delta \sin \psi n_r)$ — скорость плазмы; $q_{\parallel, r}^*$ — кондуктивная составляющая теплового потока на границе областей рециклинга и взаимодействия с газом; параметры газа вблизи пластин определяются из уравнений (3.23).

В первом приближении примем, что в процессе автоколебаний сохраняются соотношения $\langle \hat{n} \rangle \approx n_s$; $\langle T \rangle \approx T_s$; $\langle \hat{n} \hat{V}_{\parallel} \rangle \approx n_r V_{\parallel, r}$; $q_{\parallel, r}^* = (8A_x/49)(T_s^{7/2} - T_P^{7/2})/L_s$, справедливые для стационарных состояний.

Введем переменную $u_s = n_s \sigma_0 \delta$ ($\sigma_0 = 10^{-14}$ см²) и учтем, что из условия $\Gamma_0, n_g \dot{V} \ll \Gamma_g$ следует сохранение полного числа частиц в системе, состоящей из SOL и камеры откачки объемом V_c :

$$N_0 = \langle \hat{n} \rangle \delta S_0 + n_g V_c \approx \text{const.}$$

В таком случае уравнения (3.39) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} du_s/dt &= (u_0 - u_s)/\tau_g - h_0 j_r; \\ \frac{dj_r}{dt} &= n_t \left[u_s (V_s^s)^2 - \frac{u_r}{\tilde{\sigma}_*} (V_s^p)^2 \right] - h_0 \frac{\tilde{\sigma}_*}{u_r} j_r^2; \\ \frac{du_s T_s}{dt} &= \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{T_s^{7/2} - T_P^{7/2}}{T^{7/2}} \right) q_0 \sigma_0 - h_0 j_r (5T_P + \varepsilon_{\parallel, r}) \right], \end{aligned} \right\} (3.40)$$

где $u_0 = N_0 \sigma_0 / S_0$; $\tilde{\sigma}_* = \sigma_* (T_P) / \sigma_0$; $\tau_g = 4V_c / (S_l \rho_g v_g)$; $h_0 = \sigma_0 L_0 / S_0$; $n_t = L_0 \sin^2 \psi / (S_0 \sigma_0)$; $V_s^s = \sqrt{2T_s/m_i}$; $\varepsilon_{\parallel, r} = (m_i/2)(j_r / (\delta \sin \psi \cdot n_r))^2$.

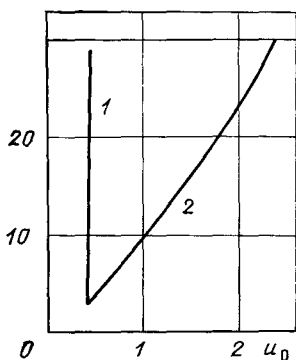


Рис. 17. Области нестационарных (1) и стационарных (2) состояний плазмы в SOL. По оси ординат отложена q_0 в Вт/см²

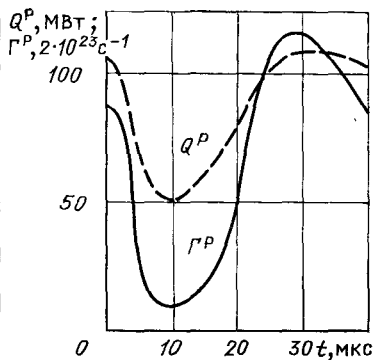


Рис. 18. Изменения во времени потоков частиц и тепла на диверторные пластины

Состояния равновесия системы (3.40) определяются из равенства нулю правых частей. В результате получаем для T_r :

$$\begin{aligned} (u_0 - h_0 \tau_g j_r) \left\{ 1 + \left(\frac{T_{**}}{T_P} \right)^{7/2} \left[1 - \frac{h_0 j_r (5T_P + \epsilon_{\parallel, r})}{q_0 \sigma_0} \right] \right\}^{2/7} = \\ = \frac{u_r}{\tilde{\sigma}_*} + \frac{h_0}{n_t} \frac{\tilde{\sigma}_*}{u_r} \left(\frac{j_r}{V_s^P} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Если (3.41) имеет единственное решение с dT_P/dj_r , то у системы (3.40) нет устойчивых стационарных состояний. В то же время легко показать, что решения (3.40) не могут неограниченно возрастать. Следовательно, они описывают автоколебания [47].

На рис. 17 область нестационарных состояний приведена в плоскости параметров u_0 , q_0 для случая реактора-токамака масштаба INTOR [34].

Отметим, что «номинальный» режим работы дивертора, которому соответствуют $u_0 \approx 1$, $q_0 \approx 30$ Вт/см², является нестационарным. Временную зависимость параметров плазмы в этом режиме демонстрирует рис. 18. Здесь представлены изменения потоков частиц Γ^P и энергии Q^P на пластины в процессе автоколебаний. Максимальная тепловая нагрузка на пластины заметно превышает поток тепла через сепаратрису.

Характерный период колебаний τ_0 определяется временем изменения потока плазмы в область рециклинга j_r между значениями, соответствующими $dT_P/dj_r = \infty$. Как следует из рис. 14, изменение j_r при этом порядка $j_{кр}$. Из уравнения для j_r и (3.20) получаем $\tau_0 \approx (j_{кр}/q_r) m_i L_s V_s^P$, что дает хорошее со-

гласие с численным расчетом: $\tau_0 \approx 5 \cdot 10^{-5}$ с. Оценки показывают, что за времена такого масштаба относительное изменение средних значений плотности и температуры не превышает 10%. Поэтому во втором уравнении системы (3.40) первый член в правой части можно считать постоянным во времени. В этом случае уравнение для j_r аналогично уравнению для релаксационных электрических колебаний в цепи с неоновой лампой [47]:

$$\frac{dV_{\text{л}}}{dt} = \frac{E_0 - V_{\text{л}} - R_0 i_{\text{л}}(V_{\text{л}})}{R_0 C_0}.$$

В нашей ситуации давление плазмы в основной части SOL играет роль э. д. с. батареи E_0 , а зависимость $n_i T_P(j_r)$ — вольт-амперной характеристики лампы $i_{\text{л}}(V_{\text{л}})$.

3.4. Разделение дейтерия и трития в диверторном слое реактора-токамака

Соотношение концентраций изотопов водорода в рабочем объеме реактора и в газе в камере откачки дивертора является важной характеристикой. При прочих равных условиях мощность реактора максимальна при стехиометрическом равнокомпонентном составе топлива. Снижение же концентрации трития в откачиваемом газе облегчит решение проблем тритиевого цикла.

Есть по крайней мере две причины различия изотопных составов плазмы в основной части SOL и газа в камере откачки. Во-первых, это различие масс нейтралов и констант элементарных процессов; во-вторых — действие в SOL продольной термосилы, которая приводит к лучшему удержанию более тяжелых тритонов в горячих областях плазмы вдали от пластин. Роль этих факторов рассматривалась в [48, 49], а вопрос о разделении изотопов водорода в плазме и нейтральном компоненте в случае рециклинга на первой стенке — в [50], где показано, что из-за различия в длинах пробега нейтралы будут заметно обогащены тритием.

Состав плазмы в SOL и газа в камере откачки будем характеризовать концентрациями: $\chi_j = n_j^g / n_g$ — атомов в газе; $\xi_j^r = n_j^r / n_r$ — ионов в области рециклинга; $\xi_j^{d^a} = n_j^{d^a} / n_d$ — ионов в области взаимодействия с газом; $\xi_j^0 = n_j^s / n_s$ — ионов в плоскости симметрии SOL; $j=1$ соответствует дейтерию $j=2$ — тритию.

Нейтралы в диверторе. В случае смеси изотопов нейтралы в плазме SOL описываются кинетическими уравнениями для функций распределения (1.20), которые необходимо дополнить членами, учитывающими перекрестную перезарядку между ионами и атомами различных изотопов. При этом в правую часть

уравнения (1.20г) нужно добавить слагаемое

$$S_j = -k^*_{cn} \xi_{3-j} f_j^* + k^*_{cn} n^{3-j} f_j^*,$$

где k^*_c — константа перекрестной перезарядки. Зависимость k_c от массы сталкивающихся частиц определяется в основном относительной скоростью, так что $k^*_c/k^j_c = \sqrt{m_j(m_1+m_2)/(2m_1m_2)}$.

Нейтралы в области рециклинга описываются в приближении $\varepsilon \ll 1$ и $E_k = (3/2)T_p$. Для потока атомов из плазмы в камеру откачки имеет место следующее соотношение:

$$J_j^* = n_p L_0 \sin \psi \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^2 \xi_l^r V_{||,l}^P \int_{-\delta}^0 \frac{A_l^k}{\Delta_0} \varphi_{j+2}^k \exp(r_k n_r x) dx, \quad (3.42)$$

где $\varphi_1^k = 1$; $\varphi_2^k = (\beta_1 - r_k^2/\gamma_1)/\alpha_2$; $\varphi_3^k = -r_k/\gamma_1$; $\varphi_4^k = -r_k \varphi_2^k/\gamma_2$; $\alpha_j = k_c^* \xi_{3-j}^r$; $\beta_j = \alpha_j + k_i^a/v_{*j}$; $\gamma_j = \beta_j + k_c^j \xi_j^r/v_{*j}$; $r_k = \hat{\delta}_k \langle (\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2)/2 + \hat{\delta}_k \{[(\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2)/2]^2 + \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2\}^{1/2} \rangle^{1/2}$; $\hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_2 = \hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_3 = -1$; $\hat{\delta}_3 = \hat{\delta}_4 = \hat{\delta}_2 = \hat{\delta}_3 = 1$; $\Psi_{1,2}^k = \varphi_{3,4}^k$; $\Psi_{3,4}^k = \exp(r_k n_r x) (\varphi_{1,2}^k - \varphi_{3,4}^k)$; $\Delta_0 = \det \|\Psi\|$; A_l^k — адьюнкта элемента $\Psi_{||,l}^k$; $V_{||,l}^P$ — скорость, с которой ионы сорта l выходят на пластину вдоль магнитного поля.

Нейтральный компонент в плазме в области взаимодействия с газом рассматривается в предположении, что газ состоит из атомов с температурой $T_g \ll T_p$. Получено следующее выражение для потока заряженных частиц сорта j в область рециклинга:

$$\Gamma_r^j = n_g l_d \sin \psi \cdot \chi_j v_g^j \beta_j / \gamma_j - \sum_{k,l=1}^2 (-1)^{k+l} \chi_k V_g^k \times \\ \times (1 - \beta_k/\gamma_k) \hat{\varphi}_l^{3-k} \varphi_{j+2}^{3-l} (\hat{\varphi}_1^1 \hat{\varphi}_2^2 - \hat{\varphi}_1^2 \hat{\varphi}_2^1), \quad (3.43)$$

где $\hat{\varphi}_k^l = \varphi_k^l - \varphi_{k+2}^l$; величины α_j , β_j , γ_j , φ_j вычисляются при $T = T_d$; $\xi_j = \xi^{d_j}$; V_{jg} — средняя скорость атомов сорта j в газе, с которой они поступают в SOL.

Условия $\Gamma_r^j = J_j^*$ дают уравнения для определения концентрации изотопов в газе при известных параметрах плазмы в SOL.

Роль термосилы. Для описания ионных компонентов дейтериево-тритиевой плазменной смеси используем уравнение движения вдоль магнитного поля с учетом действующих между ионами различных изотопов силы трения и термосилы:

$$d(m_j n_j V_{||j}^2 + n_j T)/dl = e n_j E_{||} + 0,71 n_j dT/dl - \\ - F_T^{j,3-j} - n_j n_{3-j} m_{dl} \alpha_{dt} (V_{||j} - V_{||3-j}), \quad (3.44)$$

где $m_{dt} = m_d m_i / (m_d + m_i)$; $\alpha_{dt} = 4 \sqrt{2\pi} \Lambda_c e^4 / (3 \sqrt{m_{dt}} T^{3/2})$, а выражение для термосилы, действующей между ионами с зарядами $z_{\alpha, \beta}$ и массами $m_{\alpha, \beta}$, взято из [51]:

$$F_T^{\alpha, \beta} = -3 \frac{\xi_\alpha \xi_\beta (\xi_\alpha S_\alpha - \xi_\beta S_\beta) n}{\xi_\alpha^2 Q_\alpha + \xi_\alpha \xi_\beta Q_{\alpha\beta} + \xi_\beta^2 Q_\beta} \frac{dT}{dl}, \quad (3.45)$$

где $S_\alpha = 0,53 M_\alpha M_\beta^{1/2} (z_\alpha/z_\beta)^2 - 1,5 M_\alpha M_\beta + 3 M_\beta (M_\alpha - M_\beta)$; $Q_\alpha = 0,53 M_\beta^{1/2} (z_\alpha/z_\beta)^2 (6 M_\beta^2 + 2,6 M_\alpha^2 + 3 M_\alpha M_\beta)$; $Q_{\alpha\beta} = 0,56 (M_\alpha M_\beta)^{1/2} + 7,8 (M_\alpha - M_\beta)^2 + 12,8 M_\alpha M_\beta$; $M_{\alpha, \beta} = m_{\alpha, \beta} / (m_\alpha + m_\beta)$; у величин S_β, Q_β индексы α и β переставляются.

Сила трения препятствует отрыву скоростей ионов различных изотопов и изменению их концентраций; термосила концентрирует более тяжелые тритоны в горячих областях плазмы. Соотношение между этими силами меняется с расстоянием от пластин: в области рециклинга, где потоки заряженных частиц велики и V_\parallel порядка V_s , превалирует сила трения, и $\xi_j(l) \simeq \simeq \text{const}$; вдали от пластин, где скорости течения малы по сравнению с V_s , изменение изотопного состава определяется термосилой. В основной части SOL с учетом обратного течения из области взаимодействия с газом для этого требуется выполнение условия $(L_d/u_r) \sqrt{T_0/T_P} \ll \lambda_c$, что, как показывают оценки, справедливо для реактора.

Согласно (3.44), (3.45) условие равенства силы трения и термосилы в некоторой точке, где $T=T_*$, можно записать в виде

$$m_{dt} \alpha_{dt} n V_\parallel \approx dT/dl. \quad (3.46)$$

При сильном рециклинге на пластине поток заряженных частиц спадает с расстоянием от пластины как

$$n V_\parallel = n_P V_s^P \exp\left(-\int_0^\xi \alpha_* n d\xi\right). \quad (3.47)$$

Условие (3.46) можно переписать в виде

$$M \equiv V_\parallel / V_s = \lambda_c / L_T \ll 1,$$

так как в рамках применимости гидродинамического приближения характерный размер изменения температуры вдоль магнитного поля L_T велик по сравнению с длиной пробега между кулоновскими столкновениями. Поэтому при интегрировании в (3.47) давление плазмы можно считать постоянным вдоль поля, а перенос тепла — чисто теплопроводностным:

$$n = n_r T_P / T, \quad -\kappa_{\parallel}^e dT/dl = \gamma_0 T_P n_P V_s^P.$$

Показатель экспоненты в (3.47) преобразуем следующим образом:

$$\int_0^{\xi} \sigma_* n d\xi = \int_{T_P}^{T(\xi)} \sigma_* n_r \frac{T_P}{T} \frac{d\xi}{dl} \frac{dl}{dT} dT = \int_{T_P}^{T(\xi)} \sigma_* n_r \frac{T_P}{T} \sin \zeta \frac{x_{\parallel}^e dT}{\gamma_0 T_P n_P V_s^P}.$$

Как будет показано, T_* превышает I_H и в большей части интервала интегрирования $\sigma_* \approx \text{const} = 5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$. Нижний предел можно положить равным нулю, так как в режиме с сильным рециклингом $T_P < I_H$. В результате получаем

$$nV_{\parallel}(T_*) = n_P V_s^P \exp\left(-\frac{2}{5} \sin \zeta \sigma_* A_r \frac{A_* T_*^{5/2}}{\gamma_0 V_s^P}\right). \quad (3.48)$$

Подстановка (3.48) в (3.46) дает уравнением для T_* :

$$T_* \approx \left[\frac{2}{5} \frac{\gamma_0 V_s^P}{\sin \zeta \cdot \sigma_* A_* A_r} \ln\left(\frac{T_* \cdot 3.16}{\gamma_0 T_P} \sqrt{\frac{m_{dt}}{m_e}}\right) \right]^{2/5},$$

откуда следует, что величина T_* слабо зависит от параметров. Принимая для них типичные значения, получаем $T_* \approx 20 \text{ эВ}$.

В области $T_P \leq T \leq T_*$ концентрация ионов изотопов водорода изменяется незначительно. При $T > T_*$ в уравнении (3.44) можно пренебречь силой трения и инерционным членом.

Напряженность электрического поля E_{\parallel} находим из уравнения движения электронов, которое в отсутствие продольного тока в SOL имеет вид [4]:

$$-\partial P_e / \partial l - enE_{\parallel} - 0,71 n \partial T_e / \partial l = 0. \quad (3.49)$$

Подставив E_{\parallel} в (3.44), получаем:

$$d\xi_j / dl = -F^{j,3-j_T} / (nT).$$

Используя (3.45), где коэффициенты S и Q вычислены для дейтериево-тритиевой плазмы, и проведя интегрирование, получим

$$\left(\frac{1 - \xi_2}{1 - \xi_2^0}\right)^{3.5} \left(\frac{1,15 - \xi_2^0}{1,15 - \xi_2}\right)^{1,65} \left(\frac{\xi_2^0}{\xi_2}\right)^{0,81} = \frac{T_s}{T}, \quad (3.50)$$

где $\xi_2^0 = \xi_2|_{l=0}$; $T_s = T|_{l=0}$.

Если в плоскости симметрии SOL плазма имеет стехиометрический состав ($\xi_2^0 = 0,5$), для реактора-токамака масштаба ИНТОР ($T_s \approx 250 \text{ эВ}$) из (3.50) находим: $\xi_2^r = \xi_2(T_*) \approx 0,16$; $\xi_2^d = \xi_2(T_d) \approx 0,2$. Расчет концентрации трития в газе дает $\chi_2 = 0,17$.

Таким образом, в режиме сильного рециклинга плазмы на пластинах дивертора реактора-токамака следует ожидать значительного обеднения газа в камере откачки тритием.

3.5. Переход с «конденсацией» плазмы в области рециклинга

Роль потерь энергии на ионизацию водорода. С ростом плотности плазмы в SOL температура в области рециклинга падает и согласно (3.13) возрастает доля теплового потока, расходуемая на ионизацию и возбуждение нейтралов, поступающих с диверторных пластин. В результате, как показано в [52], при некоторых условиях возможно развитие неустойчивости баланса тепла.

Следуя [52], рассмотрим отдельную силовую трубку в SOL. При некоторых условиях, которые обсуждаются ниже, различные трубки в достаточной степени независимы друг от друга, т. е. в первом приближении можно считать, что процессы в SOL приводят к изменениям полного числа частиц в каждой из них. Учтем в уравнении баланса тепла в области рециклинга потери энергии электронами на ионизацию и возбуждение нейтралов водорода. Для плотности плазмы n_r имеем:

$$n_r = q_t A_r / [V_s^P \sin \psi (\gamma_0 T_P + E^a_i)], \quad (3.51)$$

где $q_t = Q_0 / (L_0 \delta)$.

Подставляя (3.51) в (3.34), получаем для средней плотности плазмы в основной части SOL:

$$\langle n \rangle \approx n_l g_*(\gamma_0 T_P / E^a_i), \quad (3.52)$$

где $n_l = \frac{q_t A_r}{2 \sin \psi \cdot T_0} \sqrt{\frac{m_i}{2 \gamma_0 E_i^a}}$; $g_*(y) = 2 \sqrt{y/(y+1)}$; $g_*(y)$ имеет максимум, равный 1 при $y=1$ и стационарные состояния существуют при $\langle n \rangle \leq n_l$. При фиксированном $\langle n \rangle < n_l$ из двух возможных состояний состояние $T_P < E^a_i / \gamma_0$ неустойчиво: потери энергии в области рециклинга, обусловленные в основном затратами на ионизацию и возбуждение атомов, составляют

$$E_i^a \Gamma^P \sim E_i^a n_p V_s^P \sim E_i^a \frac{\langle n \rangle \langle T \rangle}{T_P} V_s^P \sim \frac{1}{\sqrt{T_P}},$$

т. е. возрастают при флюктуационном падении T_P .

В [52] показано, что ситуация меняется, если учесть вклад в $\langle n \rangle$ области рециклинга, где число частиц пропорционально $n_r l_* = 1/\sigma_*$. Поскольку $\sigma_* \approx \sigma_0 \exp[-I_H / (2T_P)]$, где $\sigma_0 \approx 5 \times 10^{-15} \text{ см}^2$, вместо (3.52) имеем:

$$\langle n \rangle = n_l g_*(y) + n_t \exp(\rho/y), \quad (3.53)$$

где $y = \gamma_0 T_P / E^a_i$; $n_t = (\sigma_0 L_0)^{-1}$; $\rho = I_H \gamma_0 / (2E^a_i)$; $L_0 = L_s \sin \psi$ — длина SOL в полоидальном направлении.

Графически зависимость $\langle n \rangle$ от y , даваемая (3.53), представлена на рис. 19 для двух значений соотношения n_l/n_t . При $n_l \ll n_t$ второй член в (3.53) превалирует над первым во всем

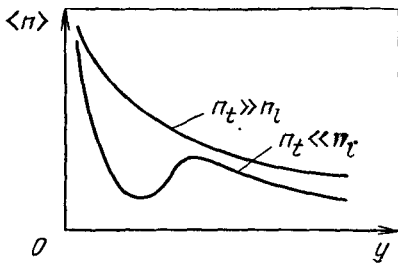


Рис. 19. Зависимость средней плотности плазмы в силовой трубке SOL от обезразмеренной температуры

интервале $y \leq 1$ и неустойчивый участок с $d\langle n \rangle / dT_p > 0$ отсутствует. В состояниях с $n_i < \langle n \rangle$ заряженные частицы в SOL сосредоточены в основном в области рециклинга. При $n_i \gg n_t$ неустойчивый участок сохраняется и зависимость $\langle n \rangle$ от y имеет N-образный вид. В данном случае увеличение $\langle n \rangle$ выше некоторого критического значения, близкого к n_i , приводит к скачкообразному переходу в состояние с «конденсацией» заряженных частиц в области рециклинга.

Немонотонная зависимость $\langle n \rangle$ от y имеет место, если n_i/n_t превышает критическое значение. По аналогии с критической температурой для кривых Ван-дер-Ваальса оно определяется из условий одновременного обращения в нуль $d\langle n \rangle / dy$ и $d^2\langle n \rangle / dy^2$, которые имеют вид:

$$n_i \frac{1-y}{\sqrt{y}(1+y)^2} = n_t \frac{\rho}{y^2} \exp(\rho/y);$$

$$n_i \frac{1+6y-3y^2}{2y^{3/2}(1+y)^3} = n_t \frac{\rho}{y^3} \left(2 + \frac{\rho}{y}\right) \exp(\rho/y).$$

Отсюда находим уравнение для y :

$$y^3 + y^2(6+2\rho) - 4y - 2\rho = 0.$$

При $\rho \approx 1$ искомый корень равен 0,7, а критическое значение отношения $n_i/n_t = 70$.

Для критического значения $q_i - q_*$ —, используя определение T_0 , получаем следующую зависимость от параметров:

$$q_* = \tilde{q}_* \sin^{3/5} \psi / L_\theta, \quad (3.54)$$

где $\tilde{q}_* = 3400 \left(\frac{1}{A_r \sigma_0} \sqrt{\frac{\gamma_0 E_i^u}{m_i}} \right)^{7/5} A_z^{-2/5}$.

Подставляя типичные значения параметров, находим $\tilde{q}_* = 0,3$ МВт/см. Для реактора-токамака масштаба INTOR из (3.54) имеем $q_* \approx 0,15$ кВт/см², что значительно ниже ожидаемой тепловой нагрузки пластины.

Область применимости приведенных результатов ограничена достаточно большими T_p , так как в модели не учитываются процессы объемной рекомбинации и изменение температуры по ширине области рециклинга. В качестве оценки можно, по-видимому, принять $T_{\min p} \approx 1,5$ эВ. Кроме того, должно выполняться

ся условие, что состояние с «конденсацией» является состоянием с сильным рециклингом:

$$L_0 n_r T_P / T_0 < n_r l_* < n_r \delta.$$

Это требует выполнения неравенства

$$\frac{8S_0 A_*}{49L_d^2 L_0} \left(\frac{L_0 T_P}{\delta} \right)^{7/2} < q_t. \quad (3.55)$$

При $T_P < E^a_i / \gamma_0$ из (3.36) для $D_{\perp} = D_0 = \text{const}$ имеем

$$\delta = \left(\frac{\alpha_* D_{\perp} L_s}{V_s^P} \frac{A_r T_P}{E_i^a} \right)^{1/2}.$$

Подставив это выражение в (3.55), получим

$$q_t > q_{**} = \frac{8A_*}{49} L_0^{3/4} \sin^{15/4} \psi \left(\frac{T_P E_i^a V_s^P}{\alpha_* D_{\perp} A_r} \right)^{7/4}. \quad (3.56)$$

При $T_P \geq T_P^{\min}$ для параметров INTOR находим $q_{**} \geq 4$ кВт/см², что гораздо выше q_* . Найденное значение q_{**} близко к уровню q_t в INTOR и переход к состоянию с «конденсатом» возможен при $\langle n \rangle \geq n_l \approx 2 \cdot 10^{14}$ см⁻³.

Автоколебания между разными состояниями с сильным рециклингом. Неоднозначность зависимости T_P от $\langle n \rangle$ и неустойчивость состояний с $dT_P/d\langle n \rangle > 0$ должны, как показано в [53], приводить к возбуждению автоколебаний в плазме SOL между высокотемпературной и низкотемпературной ветвями кривой $T_P(\langle n \rangle)$. Рассмотрим, следуя [53], ситуацию, когда обмен частицами между соседними трубками обусловлен переносом поперек магнитного поля нейтралов, возникающих при рециклинге плазмы на пластине. В этом случае приближение независимых силовых трубок применимо, если $L_s/V_s \ll \delta^2 n_P \cdot k_c/v_i^2$, что дает ограничение на q_t :

$$q_t > \frac{V_s v_i^2 (\gamma_0 T_P + E_i^a)}{k_c D_{\perp}} \sin \psi.$$

Для высокотемпературной ветви $T_P \geq 5$ эВ и при $D_{\perp} = 1$ м²/с, $\sin \psi = 0,1$ имеем $q_t \geq 20$ кВт/см². Если данное условие выполнено, уравнение непрерывности для плазмы, проинтегрированное по длине силовой трубки, в диффузионном приближении для нейтралов имеет вид:

$$L_s \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{L_s} \left(\frac{1}{k_c n m_i} \frac{\partial n_* T}{\partial x} \right) dl,$$

где n_* экспоненциально падает с расстоянием от пластины: $n_* \approx n_P \sin \zeta \exp(-n_r \sigma_* \xi)$, поэтому параметры плазмы при интег-

рировании по l в первом приближении можно считать постоянными. В результате получаем

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_a \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial x} \right), \quad (3.57)$$

где $D_a = (k_c n_r m_i A_r L_s) \partial (T_P / \sigma_*) / \partial \langle n \rangle$.

Используя (3.20) и условие постоянства давления вдоль магнитного поля, находим, что для высокотемпературной ветви $T_P \sim$

$$\sim \langle n \rangle^{-2} \text{ и } D_a \sim \frac{d \ln \sigma_*}{d \ln T_P} - 1, \text{ т. е. } D_a < 0 \text{ при } T_P > \frac{I_H}{2}.$$

Отрицательный коэффициент диффузии обусловлен тем, что в силовых трубках, где $\langle n \rangle$ ниже, глубина проникновения атомов больше и большее их число уходит в соседние трубки, где $\langle n \rangle$ выше. При $D_a < 0$ высокотемпературная ветвь неустойчива, что следует из уравнения (3.57), линеаризованного по отношению к малым возмущениям плотности, пропорциональных $\exp(\gamma t + i k_x x)$: $\gamma = -D_a k^2 x$. Согласно [53] такая неустойчивость может быть причиной автоколебаний плазмы в полоидальном диверторе, обнаруженных в [54] при двумерном нестационарном численном моделировании плазмы в SOL INTOR.

3.6. Режим газовой мишени

При сильном рециклинге плазмы на пластинах увеличение плотности в разряде сопровождается нелинейным ростом плотности газа в камере дивертора. Действительно, из (3.12), (3.18), (3.28) следует $n_g \sim J^* \sim u^{-1} r \sim \exp[I_H / (2T_P)]$. Используя (3.20), (3.31), находим:

$$T_P = \frac{m_i}{2} \left(\frac{q_t A_r}{\gamma_0 \sin \psi} - \frac{1}{\langle n \rangle \langle T \rangle} \right)^2.$$

Таким образом,

$$n_g \sim \exp \left[\left(\frac{\langle n \rangle}{n_\sigma} \right)^2 \right], \quad (3.58)$$

где
$$n_\sigma = 0,6 \frac{A_r}{\gamma_0} \sqrt{\frac{m_i}{I_H}} \left(\frac{A_*}{L_s} \right)^{2/7} \left(\frac{q_t}{\sin \psi} \right)^{5/7}.$$

С ростом n_g все большая доля теплового потока, сбрасываемого в дивертор, рассеивается в результате процессов с участием нейтралов, поступающих в плазму из газа. При этом снижается тепловая нагрузка на диверторные пластины, которая в реакторе превысит 1 кВт/см². Режим со значительной диссипацией мощности в газе получил название *газовой мишени* и реализован в установках ASDÉX, PDX.

Плазма в условиях сильного взаимодействия с газом. При описании режима газовой мишени необходим более точный, чем принято выше, учет особенностей поперечных профилей параметров плазмы в диверторе. Нейтралы, поступающие из газа в плазму, проходят области с различной ее температурой. Так как длина пробега атомов до перезарядки мала по сравнению с характерными размерами изменения параметров, от профиля $T(x)$ существенно зависят энергии атомов, выходящих из плазмы в газ. Примем приближенно: $n(x, l) = \hat{n}(l)\eta(x)$, $T(x, l) = \hat{T}(l)\theta(x)$, $V(x, l) = \hat{V}(l)v(x)$. Данным экспериментов и двумерных численных расчетов не противоречит относительно простой вид функций, описывающих зависимости параметров от x : $\eta, \theta, v = \exp(-x^2/\delta_{\eta, \theta, v}^2)$.

Характерный размер изменения температуры в основной части SOL, δ_T , связан с δ_θ условием сохранения потока тепла, откуда следует $\delta_\theta = \sqrt{2\pi/7}\delta_T \approx 1,05\delta_T$. Интегрируя уравнения одномерного приближения (3.1) — (3.3) по ширине слоя плазмы в диверторе, получаем:

$$\frac{d}{dt} \delta_1 \hat{n} \hat{V} = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} S_n dx; \quad (3.59)$$

$$\frac{d}{dt} (\delta_2 m_i \hat{n} \hat{V}^2 + 2\delta_3 \hat{n} \hat{T}) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} R_n dx; \quad (3.60)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\delta_4 m_i \frac{\hat{V}^2}{2} + 5\delta_5 \hat{T} \right) \hat{n} \hat{V} - \delta_6 \kappa_{\parallel} (\hat{T}) \frac{d\hat{T}}{dt} \right] = - \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} Q_n dx, \quad (3.61)$$

где $\delta_1 = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \eta v dx$; $\delta_2 = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \eta v^2 dx$; $\delta_3 = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \eta \theta dx$; $\delta_4 = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \eta v^3 dx$;

$\delta_5 = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \eta \theta v dx$; $\delta_6 = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \theta^{7/2} dx$; $\Delta_{1,2}$ — границы плазмы в диверторе.

В режиме с диссипацией тепла в газе условие Бома, накладываемое на скорость течения плазмы на границе гидродинамической области, не всегда автоматически сводится к его простейшему варианту (1.5) [44]. Перепишем уравнение движения (3.60), введя переменные $M = \hat{V}/V_s$ и $\Gamma = \hat{n}\hat{V}$:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{M}{1-M^2} W, \quad (3.62)$$

где $W = \frac{FM}{\Gamma V \hat{T}} + (1+M^2) \frac{S}{\Gamma} + \frac{1+M^2}{2\hat{T}} \frac{d\hat{T}}{dt}$;

$$S = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} S_n \frac{dx}{\delta_1}; \quad F = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} R_n \frac{dx}{\delta_2} \frac{1}{\sqrt{2m_i}}.$$

В величине W , известной в газовой динамике как *действие*, первые два члена, обусловленные соответственно трением плазмы о нейтралы при перезарядке и появлением заряженных частиц от ионизации, положительны. Последний член отрицателен, поскольку температура плазмы падает по направлению к пластине. Вдали от пластин, вблизи входа в дивертор течение плазмы дозвуковое ($M < 1$), а W положительно, поскольку член, обусловленный ионизацией, основной. Следовательно, $dM/dl > 0$ и число Маха растет до тех пор, пока либо оно станет равным 1, либо действие обратится в нуль. Первый случай соответствует ситуации, рассматривавшейся ранее, с дозвуковым течением плазмы в SOL и достижением скорости звука на пластине. Если же имеет место значительная диссипация мощности в газе, последний член в W возрастает и действие обращается в нуль при некотором $l = l_1 < L_s$. Действительно, со снижением T интенсивность ионизации падает ($S \rightarrow 0$, $\Gamma \rightarrow \text{const}$) и согласно (1.6) $dT/dl|_{l=L_s}$ растет как $T^{-1.5\rho}$, т. е. последний член в W растет как $T^{-2.5\rho}$, в то время как первый меняется пропорционально $T^{-1/2\rho}$. При $L_1 < l < L_s$ $dM/dl < 0$, если $M < 1$, и $dM/dl > 0$, если $M > 1$. С условием Бома совместима только ситуация, когда $M(l > L_1) > 1$, т. е. в точке $l = L_1$ одновременно с обращением действия в нуль скорость потока плазмы должна равняться скорости звука. Таким образом, имеем систему уравнений $M|_{l=L_1} = 1$; $W|_{l=L_1} = 0$, которые дают граничное (точнее «промежуточное») условие и позволяют определить координату L_1 точки перехода через скорость звука.

Описание нейтралов в плазме. Решение кинетических уравнений в области взаимодействия плазмы с газом с учетом неоднородности температуры по ширине слоя дает распределение плотностей нейтралов в плазме [55]:

$$n_{m,a}^g = \frac{j_{m,a}^g}{v_{m,a}} \left[\exp\left(-\int_{\Delta_1}^x \frac{dx'}{l_{m,a}}\right) + \exp\left(-\int_x^{\Delta_2} \frac{dx'}{l_{m,a}}\right) \right];$$

$$n_f = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{n_m^g}{l_m^*} \exp\left(-\left|\int_{x'}^x \frac{dx''}{l_f}\right|\right) dx';$$

$$n_* = \frac{1}{2} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} [(n_* + n_a^g + n_f)(1 - \beta^2)]$$

$$\exp\left(-\left|\int_{x'}^x dx''/l_*\right|\right) dx'/l_*, \quad (3.63)$$

где $l_m = v_m/[n(k_d + k_i^m)]$; $l_m^* = v_m/[n(k_d + k_i^m/2)]$;

$l_{a,f,*} = v_{a,f,i}/[n(k_i^a + k_c)]$; $j_{m;a}^g$ — удельные потоки молекул и атомов из газа с температурой T_g ; удельные потоки нейтралов из плазмы в газ:

$$j_f = v_m \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} (n_m/l_m) \left[\exp\left(-\int_{\Delta_1}^x dx'/l_f\right) + \exp\left(-\int_x^{\Delta_2} dx'/l_f\right) \right] dx'';$$

$$j_* = (1/2) \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} v_i (n_* + n_a^g + n_f) (1 - \beta^2) \left[\exp\left(-\int_{\Delta_1}^x dx'/l_*\right) + \exp\left(-\int_x^{\Delta_2} dx'/l_*\right) \right] dx/l_*;$$

потоки энергии, переносимые нейтралами из плазмы в газ:

$$q_f = \varepsilon_f j_f;$$

$$q_* = (1/2) \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} (n_* + n_a^g + n_f) (1 - \beta^2) v_i T [(3/2) + M^2] \times$$

$$\times \left[\exp\left(-\int_{\Delta_1}^x dx'/l_*\right) + \exp\left(-\int_x^{\Delta_2} dx'/l_*\right) \right] dx/l_*;$$

$$\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} S_n dx = 2j_m^g + j_a^g - j_f - j_*;$$

$$\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} R_n dx = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} (n_* + n_a^g + n_f) MT \left[\exp\left(-\int_{\Delta_1}^x dx'/l_*\right) + \exp\left(-\int_x^{\Delta_2} dx'/l_*\right) \right] dx/l_*;$$

$$\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} Q_n dx = q_f + q_* + q_{\text{рад}},$$

где $q_{\text{рад}} = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} [k_i^m E_i^m n_m + k_i^a E_i^a (n_* + n_a + n_f)] dx$ — потери энергии электронами на возбуждение и ионизацию нейтралов.

Решение интегрального уравнения (3.63) для плотности атомов, возникающих при перезарядке, значительно увеличивает

вычислительные трудности. Однако в случае, типичном для условий диверторной плазмы в установке реакторного масштаба, когда l_* мало по сравнению с δ , вместо (3.63) можно использовать следующее из него уравнение (1.28), существенное достоинство которого состоит в том, что его численное решение может быть получено методом прогонки.

Газ в камере дивертора. Состояние газа в диверторной камере в значительной степени определяется взаимодействием с атомами, возникающими в плазменном слое при диссоциации и перезарядке нейтралов, поступающих из газовой оболочки. В [44] во внимание была принята передача энергии от горячих атомов газа, давление же газа считалось постоянным по объему камеры откачки. На важность учета обмена импульсом при столкновениях, приводящего к нарушению условия $p = \text{const}$, было указано в [56].

Эффекты сжатия и нагрева газа могут быть учтены одновременно в гидродинамическом приближении. Рассмотрим плоский слой газа между поверхностью плазмы ($x=0$) и стенкой ($x=\Delta$). Характерные размеры изменения параметров в направлениях, перпендикулярных x , велики по сравнению с Δ . Из плазмы в газ поступают атомы с температурой T_a , значительно превышающей температуру газа T_g . Горячие атомы, пролетающие слой газа без столкновений, с вероятностью R_a отражаются зеркально от стенки без потери энергии, остальные — диффузно в виде холодных атомов и молекул с температурой стенки T_w . Оценки показывают, что при интересующих нас условиях можно пренебречь диссоциацией молекул в газе.

В рамках сделанных допущений система гидродинамических уравнений для газа имеет вид:

$$d(n_m U) / dx = 0; \quad (3.64)$$

$$d(n_a U) / dx = S_a - d j_a / dx; \quad (3.65)$$

$$d[(n_a + 2n_m) m_a U^2 + (n_m + n_a) \times \\ \times T_g] / dx = -dM_a / dx; \quad (3.66)$$

$$d\{[(n_a + 2n_m) m_a U^2 / 2 + 5T_g \times \\ \times (n_a + n_m) / 2] U - \kappa_g dT_g / dx\} / dx = -dq_a / dx, \quad (3.67)$$

где U — скорость течения; κ_g — теплопроводность газа; $S_a = = J^* / (S_l \Delta)$ — поступление частиц в газ при нейтрализации плазмы на диверторных пластинах; j_a , M_a , q_a — потоки частиц, импульса и энергии, которые в газе переносят горячие атомы из плазмы.

Граничные условия уравнений (3.64) — (3.67):

$$\left. \begin{aligned} x=0: dT_g/dx=0; U &= -\sqrt{\frac{T_g}{m_a} \frac{n_m+n_a}{2n_m+n_a}}; \\ x=\Delta: -\kappa_g \frac{dT_g}{dx} &= (T_g - T_w) \frac{\alpha_e}{2-0,83\alpha_e} \times \\ &\times \left(n_a \sqrt{\frac{8T_g}{\pi m_a}} + n_m \sqrt{\frac{8T_g}{\pi m_m}} \right); \\ n_m U &= -j_a (1 - \delta_a)/2; n_a U = -j_a \delta_a, \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

где α_e — коэффициент аккомодации энергии стенкой [57].

Горячие атомы в газе описываются на основе кинетических уравнений в τ -приближении для функций распределения по скоростям f_a :

$$v_x \partial f_a / \partial x = - (f_a - f_a^0) / \tau_a, \quad (3.69)$$

где $\tau_a^{-1} \approx (\sigma_{aa} n_a + \sigma_{am} n_m) v_a$; $v_a = \sqrt{2T_a/m_a}$; σ_{aa} ; σ_{am} — сечения упругих столкновений горячих атомов с частицами в газе. По порядку $\sigma_a = \pi \rho_m^2$, где ρ_m — расстояние между рассеивающимися частицами, на котором энергия взаимодействия U_r сравнивается с T_a . В интересующем нас диапазоне энергий: $5 \leq T_a \leq 100$ эВ U_r описывается потенциалом Борна — Майера [18].

Граничные условия (3.69) имеют вид:

$$\begin{aligned} x=0: f_a(v_x > 0) &= (j_a^0/v_a) \delta(v_x - v_a); \\ x=\Delta: f_a(v_x < 0) &= R_a f_a(v_x > 0), \end{aligned}$$

где j_a^0 — плотность потока атомов из плазмы.

Поскольку f_a — это функция распределения атомов в газе с $T_g \ll T_a$ при энергиях порядка T_a , $f_a \ll f_a$. В этом случае решение (3.69) является суперпозицией взаимно проникающих потоков в направлениях $\pm x$. Соотношения для j_a , M_a , q_a имеют вид:

$$j_a = j_0 f_j; \quad M_a = j_0 m_a v_0 f_M; \quad q_a = (3/2) j_0 T_g^0 f_q,$$

где

$$j_0 = j_a^g + 2j_m^g; \quad v_0 = \sqrt{T_g^0/m_a}, \quad T_g^0 = T_g|_{x=0};$$

$$f_j = \sum_{k=1}^2 \beta_k \{ \exp(-\alpha_k \omega) - R_a^k \exp[\alpha_k (\omega - 2\omega_0)] \};$$

$$f_M = \sum_{k=1}^2 \beta_k \{ \exp(-\alpha_k \omega) + R_a^k \exp[\alpha_k (\omega - 2\omega_0)] \} \sqrt{T_a^k/T_g^0};$$

$$f_q = \sum_{k=1}^2 \beta_k \{ \exp(-\alpha_k \omega) - R_a^k \exp[\alpha_k (\omega - 2\omega_0)] \} T_a^k/T_g^0;$$

$\omega = \sigma_0 \int_0^x (n_a + \rho_{am} n_m) dx$; $\omega_0 = \omega|_{x=\Delta}$; $\sigma_0 = 10^{-15} \text{ см}^2$; $\alpha_k = \sigma_{aa}^k / \sigma_0$,
 $\beta_k = j_{a,k}^0 / j_0$ — коэффициенты, которые определяются при рассмотрении нейтралов в плазме; $k=1$ соответствует франк-кондоновским атомам; $k=2$ — атомам, возникающим при перезарядке; $\rho_{am} = \sigma_{am}^k / \sigma_{aa}^k$ считается не зависящим от k .

Интегрируя уравнения (3.64), (3.65) и используя определенные ω , получаем:

$$n_m U = -j_0 \varphi_m; \quad n_a U = -j_0 \varphi_a; \quad U = -j_0 \varphi_g \sigma_0 \Delta / \dot{\omega},$$

где $\varphi_m = (1 - \delta_a) i_j^1 / 2$; $\varphi_a = i_j + (1 - i_j^0)(1 - s) - (1 - \delta_a) i_j^1$; $\varphi_g = 2\varphi_m + \varphi_a$; $i_j^{0,1} = i_j|_{\omega=0, \omega_0}$; $s = \nu / \Delta$; точка обозначает дифференцирование по s .

Распределение температуры и кондуктивной составляющей теплового потока в газе $q_x = -\kappa_g dT_g/dx$ находим из уравнения (3.66) и его интеграла:

$$T_g = T_g^0 \frac{b}{\dot{\omega}} \frac{\varphi_g}{\varphi_m + \varphi_a} \left(\hat{i}_M - i_M - \frac{b\varphi_g^2}{\dot{\omega}} \right); \quad (3.70)$$

$$q_x = -\frac{\kappa_g T_g^0}{\Delta} \frac{b\varphi_g}{\varphi_m + \varphi_a} (a_2 - a_1 \dot{\omega}), \quad (3.71)$$

где $b = j_0 \sigma_0 \Delta / v_0$; $\hat{i}_M = i_M|_{\omega=0} + 2\sqrt{1 - \varphi_m}$; $a_1 = \left(\hat{i}_M - i_M - \frac{2b\varphi_g^2}{\dot{\omega}} \right) \times \frac{1}{\dot{\omega}^2}$; $a_2 = \left[\frac{\varphi_g'}{\varphi_g} - \frac{\varphi_a'}{\varphi_m + \varphi_a} \right] \left(\hat{i}_M - i_M - \frac{b\varphi_g^2}{\dot{\omega}} \right) - i_M' - \frac{2b\varphi_g}{\dot{\omega}} \varphi_g'$; штрих обозначает дифференцирование по ω .

Из интеграла уравнения (3.67) получаем уравнение для $\dot{\omega}$:

$$\ddot{\omega} = \frac{a_2}{a_1} + \frac{j_0 \Delta}{2\kappa_g b} \frac{\varphi_m + \varphi_a}{\varphi_g a_1} \left[3(i_q^0 - i_q) - 6(1 - \varphi_m) + \right. \\ \left. + 5 \frac{T_g}{T_g^0} (\varphi_a + \varphi_m) + \frac{b^2 \varphi_g^2}{\omega^2} \right], \quad (3.72)$$

где $i_q^0 = i_q|_{\omega=0}$.

Граничные условия (3.72): $\omega|_{s=0} = 0$; $\dot{\omega}|_{s=0} = b/\sqrt{1 - \varphi_m}$.

Неизвестные параметры T_g^0 и ω_0 определяются из условий, что при $s=1$ выполняется (3.68) и $\omega = \omega_0$. Численный анализ показывает, что такой выбор — единственный.

На основе изложенной модели описания плазмы и газа в диверторе в условиях значительной диссипации тепла в газовой оболочке в [55] были проведены расчеты для установки с зажиганием самоподдерживающейся термоядерной реакции масштаба СИТ. На рис. 20 представлены зависимости удельных тепловых нагрузок на диверторные пластины q_p и стенки камеры дивертора q_w от давления газа вблизи стенок камеры P_g^w . Увеличение P_g^w свыше 30 Па приводит к снижению q_p в 3 раза,

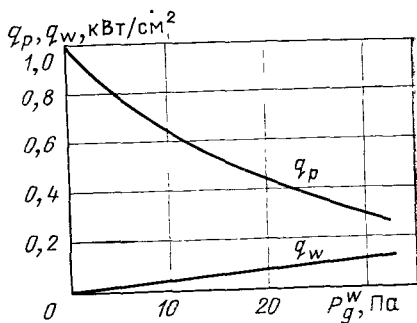


Рис 20. Зависимости удельных потоков тепла на пластины и стенки дивертора установки СИТ от давления газа

причем теплопередача пластине обусловлена в основном выделением потенциальной энергии при поверхностной рекомбинации заряженных частиц. Отметим, что при этом градиенты параметров в газе велики: его плотность возрастает от $1,3 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$ вблизи поверхности плазменного слоя до $8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ у стенок, а температура падает соответственно от 1,4 эВ до 0,2 эВ.

Газовый нейтрализатор. При снижении температуры плазмы вблизи диверторных пластин до 1 эВ важную роль в энергетическом и материальном балансе начинают играть процессы объемной рекомбинации и возникающие при этом высоковозбужденные атомы водорода. Как показано в [58], излучение из области рекомбинации может приводить к заметному снижению тепловой нагрузки на пластины. Кроме того, образующиеся атомы не удерживаются магнитным полем, что также способствует делокализации теплового потока. Таким образом, есть основания говорить о принципиальной возможности реализации в диверторе реактора-токамака так называемого *газового нейтрализатора* — ситуации, в которой поступающий из разряда поток тепла равномерно передается всем стенкам в камере откачки. Расчеты показывают [44, 55], что режим объемной рекомбинации при реакторных условиях может быть совместим с достаточно высокими плотностью и температурой на входе в дивертор. При этом плазменная пробка в горле дивертора будет эффективно препятствовать истечению нейтрального газа в рабочий объем реактора.

3.7. Сравнение с экспериментом

Физические эксперименты. Основные представленные в настоящей главе результаты, многие из которых оказались теоретическими предсказаниями ранее неизвестных явлений, получили экспериментальное подтверждение на токамаках с диверторами. Впервые режимы с сильным рециклингом плазмы на диверторных пластинах были получены на установке ASDEX [59]. Измерения, в частности, подтвердили вывод теории о том, что скорость течения плазмы вне диверторного объема в этих режимах мала по сравнению со скоростью ионного звука: на входе в дивертор число Маха не превышало 0,1. На рис. 21 представлены экспериментальная и расчетная зависимости плотности плазмы у диверторных пластин ASDEX от мощности W , вкладываемой в разряд. При расчетах принималось $Q_0 = 0,8W$. Характер зависимости объясняется тем, что в состоянии сильного рециклинга T_P ограничено на уровне потенциала ионизации атомов водорода (в экспериментах с ростом Q_0 T_P практически не менялось и держалось на уровне 7—10 эВ). Поскольку $Q_0 \approx \gamma_0 n_P T_P V_s \delta L_0 \sin \psi$, $n_P \sim Q_0$.

Пороговый характер перехода в состояние сильного рециклинга на диверторных пластинах продемонстрирован в экспериментах на токамаках DIII [60], JT-60. На рис. 22 приведена измеренная зависимость плотности плазмы в диверторе DIII от средней плотности в разряде с нейтральной инжекцией ($W = 4$ МВт). Здесь же представлена расчетная зависимость n_r от

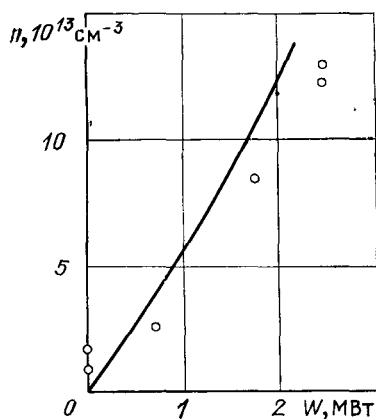


Рис. 21. Зависимость плотности плазмы у диверторных пластин токамака ASD EX от W :

точки— данные эксперимента [59]; кривая — результаты расчета

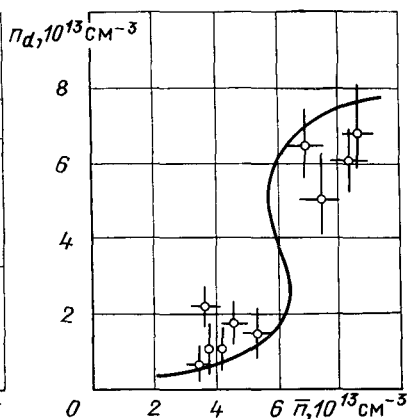


Рис. 22. Зависимость плотности плазмы в диверторе D III от средней плотности в разряде:

точки— данные эксперимента [60]; кривая — результаты расчета

Таблица 1. Параметры плазмы в ASDEX

Параметр	Теория	Эксперимент
$\langle \hat{T} \rangle$, эВ	60	90
$\langle \hat{n} \rangle$, 10^{13} см $^{-3}$	1,4	1
T_p , эВ	7	7
n_r , 10^3 см $^{-3}$	12	10
δ_T , см	1,8	1,5
\hat{r}_n , см	3	2,5

\bar{n} , которая получена с учетом экспериментально обнаруженной связи $\Gamma_0 = 1,2 \cdot 10^{22} \ln(1 - \bar{n}/8 \cdot 10^{13})^{-1}$. Критический для существования режимов с сильным рециклингом на пластине тепловой поток в дивертор в случае DIII составляет около 1 МВт.

В табл. 1 представлены результаты расчетов параметров плазмы в диверторе и в основной части SOL токамака ASDEX и данных экспериментов [59].

Видно, что давление слабо меняется вдоль магнитного поля, однако существует большой перепад температур и, следовательно, перенос тепла имеет кондуктивный характер. В состоянии сильного рециклинга в диверторе ширина SOL в соответствии с теоретическими результатами определяется длиной спада температуры.

Возможность истечения плазмы из диверторного объема в основную часть SOL вблизи поверхности контакта с газом в камере откачки подтверждена экспериментально на установке DITE с бандл-дивертором [56]. На рис. 23 представлены данные измерений поперечных профилей плотности плазмы и числа Маха в основной части SOL вблизи входа в диверторный объем. В данном случае диверторный слой непроницаем для холодных нейтралов из газовой оболочки и прозрачен для атомов, возникающих при перезарядке и диссоциации. Поэтому обратное течение плазмы локализовано на длине пробега холодных нейтралов. Отметим, что косвенным доказательством существования таких течений, по-видимому, является высокая эффективность подъема плотности в разряде при напуске газа в диверторы токамаков ASDEX, PDX.

В экспериментах на DITE [56] обнаружена также сильная неоднородность параметров газа в камере откачки и показана важность ее учета при расчетах параметров плазмы. На рис. 24 представлена измеренная зависимость интегрального излучения нейтрального водорода в диверторе в линии H_{α} от давления газа вблизи стенок диверторной камеры. Кривая 1 построена в предположении об однородности параметров газа, кривая 2 —

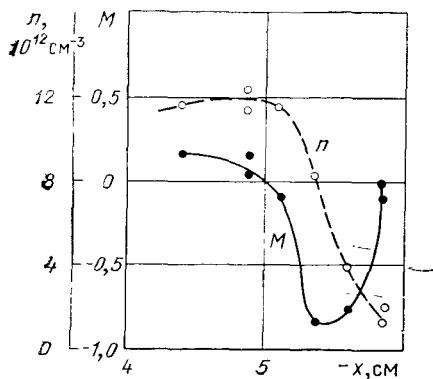


Рис. 23. Измеренные профили плотности плазмы и числа Маха в основной части SOL токамака DITE [56]

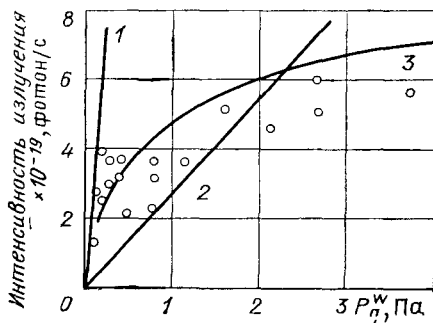


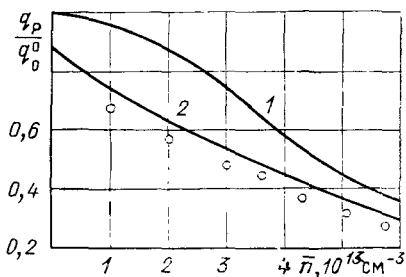
Рис. 24. Зависимость интенсивности излучения линии H_{α} атомов водорода в диверторе DITE от давления газа:

точки — данные эксперимента; 1, 2 — оценки [56]; 3 — результаты расчетов по модели § 3.6

с учетом полной передачи импульса франк-кондоновских атомов частицам газа [56]. Результаты расчетов по модели, описанной в § 3.6, демонстрирует кривая 3. Принималось, что H_{α} связано с Γ^P через параметр Хиннова: $H_{\alpha} = \Gamma^P / 14$, $\Delta = 10$ см, $R_a = 0.5$. При малых P_g^w кривая 3 близка к кривой 1, так как газ прозрачен для всех горячих атомов. При промежуточных давлениях длина пробега франк-кондоновских атомов в газе становится меньше Δ и зависимость, даваемая кривой 2, удовлетворительно описывает реальную ситуацию. При достаточно больших P_g^w в газе «застевают» и атомы, возникающие при перезарядке и имеющие температуру 30–40 эВ. Это приводит к дальнейшему ослаблению зависимости H_{α} от P_g^w , так как перепад давления в газе возрастает, температура газа вблизи поверхности контакта с плазмой увеличивается, а поток нейтралов из газовой оболочки падает как $P_g^P / \sqrt{T_g^0}$, где P_g^P — давление газа у плазмы.

Результаты теоретического описания режимов с газовой мишенью, исследовавшиеся на токамаках ASDEX, PDX, показаны на рис. 25. Здесь приведены расчетные [40, 61] и экспериментальные [62] зависимости доли теплового потока, поступающего в дивертор ASDEX, которая передается пластинам, от средней плотности в токамаке. Видно, что результаты теории удовлетворительно согласуются с данными экспериментов и позволяют объяснить достаточно высокую эффективность диссипации мощности в газе.

Рис. 25. Доля передаваемого пластинам теплового потока в дивертор: точки — данные эксперимента [62]; 1 — результаты [40]; 2 — расчет по двумерной модели [61] (зависимость Q_p/Q_0 от плотности нейтралов, полученная в [61], пересчитана с использованием данных [62])



Таким образом, можно говорить о достаточном уровне понимания физической природы процессов в диверторной плазме, изложенных в данной главе. Это понимание может быть базой для дальнейшего совершенствования теоретического описания и повышения его точности, необходимых при проведении инженерных плазмо-физических расчетов в рамках проектирования будущих дорогостоящих реакторных установок, таких как CIT, NET, ITER, OTF. Основным направлением такого совершенствования стало создание больших компьютерных моделей.

Вычислительные эксперименты. Современные компьютерные модели описания поведения плазмы и нейтралов в SOL и диверторе токамака [54, 61, 41] позволяют учитывать значительно более широкий спектр процессов, чем это возможно при использовании аналитических и полуаналитических методов, описанных выше.

Важнейшим элементом численных моделей является использование вероятностных методов Монте-Карло для описания нейтрального компонента. Разработанные для их формализации коды, например DEGAS [19], включают несколько десятков реакций с участием атомов, молекул и молекулярных ионов водорода в плазме, позволяют описывать трехмерные конфигурации, органичным образом объединяются с программами для численного описания процессов взаимодействия заряженных и нейтральных частиц с материальными поверхностями [19]. В качестве примера использования таких методов на рис. 26 показана картина уровней равной плотности атомов водорода в диверторном объеме проектируемой установки CIT.

Компьютерные модели позволяют получить достаточно точные численные решения двумерных нестационарных уравнений переноса плазмы в SOL. На рис. 27 представлены рассчитанные в [61] поперечные профили плотности и температуры плазмы в SOL и диверторе токамака ASDEX; здесь же приведены данные экспериментов [59]. Использование быстродействующих компьютеров позволяет моделировать поведение плазмы с учетом реальной геометрии магнитных и материальных поверхно-

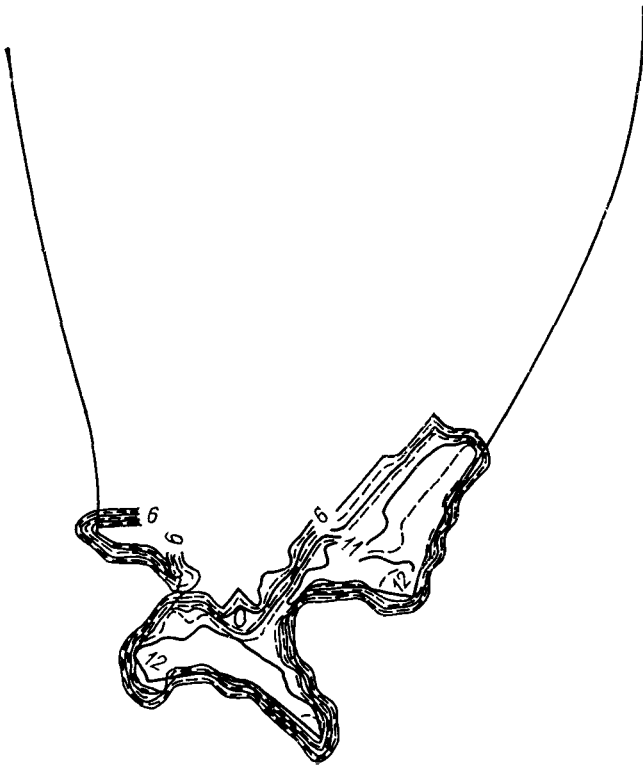


Рис. 26. Уровни равной плотности нейтралов в диверторе СИТ (числа соответствуют значениям $\lg n_0$)

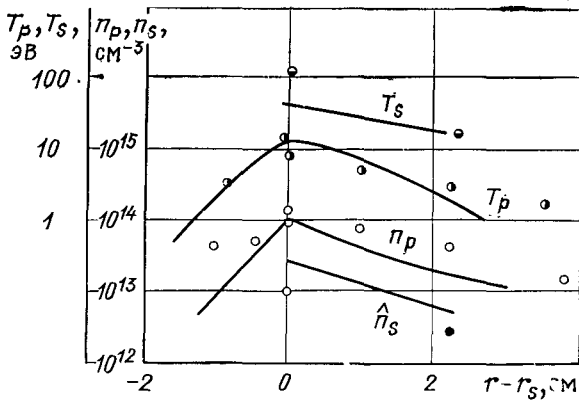


Рис. 27. Поперечные профили температуры электронов и плотности плазмы у пластин и в плоскости симметрии токамака ASD EX:

●, ○, ●, ● — данные эксперимента; — — результаты расчета [61]

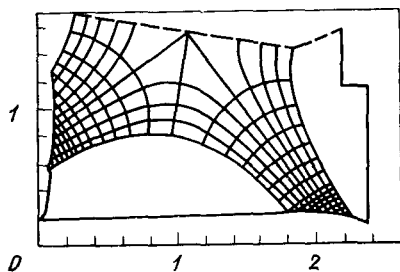


Рис. 28. Геометрия магнитных поверхностей и диверторных пластин в реакторе-токамаке INTOR

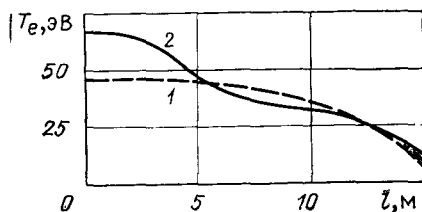


Рис. 29. Профили температуры электронов в SOL ASD EX без учета (1) и с учетом (2) поправок на нелокальность теплопереноса

стей [63]. Пример такой геометрии в случае INTOR демонстрирует рис. 28.

Численное моделирование позволяет также учесть нелокальный теплоперенос электронов вдоль магнитного поля. Например, учет этого явления при описании SOL ASDEX [64] дал значительно лучшее согласие с экспериментом по сравнению с результатами, учитывающими чисто кондуктивный перенос тепла (рис. 29).

Точность численного моделирования диверторной плазмы в дальнейшем будет возрастать. Но с увеличением числа процессов, включенных в модели, для понимания и интерпретации результатов будет необходимо развивать относительно простые аналитические модели, подобные описанным в настоящей главе.

Глава 4

ПРИСТЕНОЧНАЯ ОБЛАСТЬ В ТОКАМАКЕ С ЛИМИТЕРОМ

4.1. Плазма в лимитерном слое, проницаемом для нейтральных частиц

Ввиду того что для реактора диверторная конфигурация считается более предпочтительной, теоретические исследования плазмы в пристеночной области токамаков с лимитерами немногочисленны.

Существуют принципиальные трудности в непосредственном перенесении моделей, развитых для дивертора на конфигурацию с лимитером. Они связаны с тем, что нейтралы, появляющиеся при рециклинге на лимитере, попадают в периферийную область с замкнутыми магнитными поверхностями, и непосредственно

влиют на параметры плазмы в ней. В связи с этим теоретическое изучение лимитерного слоя проводится до сих пор в основном на базе аналитических и полуаналитических моделей.

Если выполнено условие (2.35), в лимитерном слое можно пренебречь взаимодействием плазмы с нейтралами, поступающими с лимитера и первой стенки. В этом случае материальный баланс в SOL описывается (3.29), уравнение движения вдоль магнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial l} (m_i n V_{\parallel}^2 + 2nT) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\perp} \frac{\partial n}{\partial x} V_{\parallel} \right), \quad (4.1)$$

температура плазмы, как показано в § 3.3, меняется слабо: $T/\alpha < 0 \approx \text{const} = T_s$. Значение T_s определяется из балансов тепла и частиц в периферийной области (2.15), (2.16).

Первоначально рассмотрим ситуацию, когда длина отрезков силовой линии $2L_s$ между последовательными пересечениями поверхности лимитера одинакова для всех его точек. Если коэффициент поперечной диффузии в SOL не зависит от параметров плазмы $D_{\perp}|_{x<0} = \text{const} = D_s$, то, интегрируя уравнения (3.29), (4.1) вдоль магнитного поля, получаем:

$$\left. \begin{aligned} L_s D_s d^2 \langle n \rangle / d\lambda^2 &= n_p V_s; \\ L_s D_s d \langle (V_{\parallel} dn/d\lambda) \rangle / d\lambda &= 2n_p V_s^2 - n_s V_s^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где $n_{s,p} = n|_{l=0,L_s}$.

Средняя плотность плазмы и плотность в плоскости симметрии близки: $\langle n \rangle = \alpha_n n_s$, где $\alpha_n \approx 1$. Кроме того, в SOL, прозрачном для нейтралов, поток плазмы вдоль поля меняется за счет поступления заряженных частиц из периферийной области ($x \geq 0$) почти линейно с l , так что $\langle nV_{\parallel} \rangle \approx \beta_n n_p V_s$, где $\beta_n \approx 1/2$; изменение nV_{\parallel} с x обусловлено в основном спадом плотности: $\partial \ln n / \partial \ln V_{\parallel} \gg 1$.

В таком случае приближенное решение уравнений (4.2) с граничным условием (1.9б) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \langle n \rangle &= a_+ \text{sh} \left(\lambda_+ \frac{x - x_w}{\delta} \right) + a_- \text{sh} \left(\lambda_- \frac{x - x_w}{\delta} \right); \\ n_p &= a_+ \lambda_+^2 \text{sh} \left(\lambda_+ \frac{x - x_w}{\delta} \right) + a_- \lambda_-^2 \text{sh} \left(\lambda_- \frac{x - x_w}{\delta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где $\delta = \sqrt{D_s L_s / V_s}$; $\lambda_{\pm} = \sqrt{(1 \pm \sqrt{1 - \beta_n / \alpha_n}) / \beta_n}$.

Коэффициенты a_{\pm} определяется из граничных условий на магнитной поверхности, касающейся лимитера ($x=0$). Одно из них — заданный интегральный поток частиц Γ_s в SOL из периферийной области. Кроме того, фиксируем отношение $\eta_* =$

$= n_p / \langle n \rangle |_{x=0}$, которое должно определяться из самосогласованного рассмотрения SOL и периферийной области. В результате находим:

$$a_{\pm} = \frac{\Gamma_s \delta}{D_s} \left[\lambda_{\pm} \operatorname{ch} \left(\lambda_{\pm} \frac{x_w}{\delta} \right) + \lambda_{\mp} \frac{\lambda_{\pm}^2 - \eta_*}{\eta_* - \lambda_{\mp}^2} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_{\pm} x_w / \delta)}{\operatorname{th}(\lambda_{\mp} x_w / \delta)} \right].$$

При $\delta \ll \Delta = |x_w|$ изменение плотности в SOL описывается двумя экспонентами. Так как $\lambda_+ > 1$, $\lambda_- < 1$, относительный вклад составляющей с меньшей длиной спада в n_p больше, чем в $\langle n \rangle$. Следовательно, при $|x| \leq \delta / \lambda_+$ плотность плазмы вблизи лимитера спадает быстрее, чем вдали от него.

В случае рельсового лимитера длина силовой линии зависит от положения точки ее пересечения с лимитером. В [65] показано, что это должно приводить к появлению зависимости длины спада плотности в SOL $\delta_n = \left| \frac{dx}{d \ln n} \right|$ от x и полоидального угла θ . Полная картина изменения плотности получена на основе численного решения трехмерных уравнений переноса.

В гл. 6 показано, что полоидальная асимметрия параметров плазмы в SOL может быть также обусловлена влиянием тороидального дрейфа заряженных частиц, который не учитывается в уравнениях переноса (1.1) — (1.3). Отметим также работу [66], где рассмотрена асимметрия в случае конфигурации с тороидальным лимитером, обусловленная характером протекания токов равновесия в лимитерном слое.

4.2. Влияние рециклинга на лимитере на плазму SOL

Исследование этого влияния может быть в основном проведено на базе моделей, развитых в гл. 3. Здесь же ограничимся изложением результатов, полученных при рассмотрении собственно лимитерных конфигураций, которые дополняют теоретические представления о роли рециклинга в пристеночной плазме.

Проницаемость SOL для нейтралов, поступающих с лимитера [42]. Как показано в гл. 3, для определения параметров плазмы в SOL необходимо найти связь их значений в области рециклинга с потоком из слоя плазмы нейтралов, возникающих при рекомбинации заряженных частиц на материальной поверхности. В § 3.2 приведено решение этой задачи в приближении малого угла ϵ между материальной и магнитной поверхностями. Приближенное решение для случая $\epsilon = \pi/2$ получено в [42]. При этом для решения двумерных кинетических уравнений был использован метод, близкий к изложенному в [67]. Основные его моменты рассмотрим на примере приближения «горячих» первичных нейтралов [предполагается, что с материальной поверхности в плазму поступают только атомы с энергией $E_* =$

$= (3/2)T_p]$. В таком случае выкладки значительно упрощаются, однако обобщение метода на случай более сложного энергетического спектра первичных атомов не представляет принципиальных трудностей.

Примем, что параметры плазмы в области рециклинга вблизи лимитера имеют не зависящие от координат значения n_r и T_p в слое толщиной δ (см. рис. 30). При $x < -\delta$ плазма отсутствует, что при $x > 0$ находится периферийная область. Уравнение (1.20г), записанное в координатах x и ξ , проинтегрируем по ξ и v_{ξ} . В результате получаем:

$$v_x \partial F_{*} / \partial x = j_{*,\xi} |_{\xi=0} - (k_i^a + k_c) n_r F_{*} + k_c N_{*} F_i, \quad (4.4)$$

$$\text{где } F_{*} = \int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\xi} f_{*}; \quad j_{*,\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} v_{\xi} f_{*} dv_{\xi}; \quad N_{*} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{*} dv_x; \quad F_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i dv_{\xi}.$$

Источник атомов на поверхности лимитера принимается однородным по x , а его зависимость от v_x , так же как и F_i , — двухскоростной:

$$j_{*,\xi} |_{\xi=0} = n_p V_s \sin \psi \cdot g(v_x); \quad F_i = n_r g(v_x),$$

где $g(v_x) = (1/2) [\delta(v_x - v_i) + \delta(v_x + v_i)]$.

Решение (4.4) ищем в виде $F_{*} = A_{+} \delta(v_x - v_i) + A_{-} \delta(v_x + v_i)$ при условии, что потоки атомов в область рециклинга через боковые поверхности SOL пренебрежимо малы. В результате имеем:

$$A_{\pm} = \frac{n_p \sin \psi \cdot \delta}{2\beta u_r} \langle 1 - \{(1 \mp \beta) \exp(u_r s) \pm (1 \pm \beta) \times \\ \times \exp[-u_r(1+s)]\} / [1 + \beta + (1 - \beta) \exp(-u_r)] \rangle, \quad (4.5)$$

где $u_r = n_r \sigma_{*} (T_p) \delta$, $s = x/\delta$.

Используя соотношения (4.5), находим выражение для интегрального потока атомов из SOL в области рециклинга:

$$J^{*} = L_0 \int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x f_{*} |_{x=-\delta}^{x=0} = L_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x F_{*} |_{x=-\delta}^{x=0} = \\ = \Gamma^P \frac{2}{u_r [\beta + \text{cth}(u_r/2)]}, \quad (4.6)$$

где $\Gamma^P = n_p V_s \sin \psi \cdot \delta L_0$ — поток плазмы на лимитер; L_0 — полная длина контакта плазмы с лимитером в направлении, перпендикулярном x и ξ ; предполагается, что $L_0 \gg \delta$.

Чтобы найти профиль плотности атомов, усредненной по ширине SOL, т. е. $\bar{n}(\xi) = \int_{-\delta}^0 n_{*} dx / \delta$, уравнение (1.20г) проинтегри-

руем по x и v_x :

$$v_{\xi} \partial \Phi_{*} / \partial \xi = - \frac{1}{\delta} j_{*,x} \Big|_{x=-\delta}^{x=0} - (k_i^a + k_c) n_r \Phi_{*} + k_c \bar{n}_{*} \Phi_i, \quad (4.7)$$

$$\text{где } \Phi_{*} = \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\delta}^0 d\lambda f_{*}; \quad j_{*,x} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x f_{*} dv_x; \quad \Phi_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i dv_x.$$

Приближенное решение уравнения (4.7) находим, полагая, что Φ_{*} и $j_{*,x} \Big|_{x=-\delta}^{x=0}$ связаны так же, как и их интегралы по ξ и v_{ξ}

$$\int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\xi} \Phi_{*} = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^0 dx \int_{-\infty}^{\infty} dv_x F_{*};$$

$$\int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\xi} j_{*,x} \Big|_{x=-\delta}^{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x F_{*} \Big|_{x=-\delta}^{x=0},$$

которые могут быть вычислены с помощью (4.5). Таким образом, вместо (4.7) получаем приближенное уравнение:

$$v_{\xi} \partial \Phi_{*} / \partial \xi = - (\hat{k}_i^a + k_c) n_r \Phi_{*} + k_c \bar{n}_{*} \Phi_i, \quad (4.8)$$

где $\hat{k}_i^a = k_i^a + \frac{\gamma_* v_i}{n_r \delta}$; $\gamma_* = \frac{2\beta}{\beta - 2/u_r + \text{cth}(u_r/2)}$, аналогичное кинетическому уравнению для перезарядившихся атомов в полубесконечной плазме с точностью до замены k_i^a эффективной константой «исчезновения» нейтралов \hat{k}_i^a , учитывающей как ионизацию, так и уход атомов через боковые поверхности лимитерного слоя. Методика решения таких уравнений описана в гл. 2.

Отметим, что качественно зависимости J^* от u_r , даваемые (4.6) и (3.18а), близки. Поэтому результаты, полученные в § 3.2, в частности, вывод о пороговом характере перехода в состояние сильного рециклинга в SOL, применимы и при $\varepsilon = \pi/2$. Однако в этом случае из структуры (4.8) видно, что пороговые потоки тепла и частиц в область рециклинга должны оцениваться из условия $u^{\max}_r(T_D) \approx 2$: если при $\varepsilon \ll 1$ нейтралы покидают SOL только через одну боковую поверхность, то при $\varepsilon = \pi/2$ — через две.

В [42] при рассмотрении нейтрального компонента учитывались две составляющие — атомы, возникающие при отражении ионов, ускоренных в дебаевском слое, и перезарядившихся атомов. Значение $q_{кр}$ было найдено на основе численного решения уравнений (3.12), (3.13). Получено, что $q_{кр}$ через коэффициенты отражения энергии слабо зависит от материала лимитера: в случае углерода $q_{кр}/\sin \psi = 5,9$ кВт/см, молибдена — 5,1 кВт/см.

Поток частиц плазмы в область рециклинга [68]. Часть потока нейтралов из SOL в области рециклинга поступает в периферийную область плазмы, часть — на первую стенку вблизи лимитера [в идеализированной модели, рассмотренной выше, обе части составляют $(1/2)J^*$]. Доля атомов, попадающих в периферийную область, равная альбедо A_l , «отражается» к стенке в результате перезарядки. Следовательно полный поток атомов, возникающих при рециклинге плазмы на лимитере, на первую стенку равен $J^*/2(1+A_l)$.

Результат взаимодействия нейтралов со стенкой зависит от ее состояния. Если стенка обезгажена, то доля ρ_w атомов, сорбируемых стенкой, равна $1-R_N$; если стенка насыщена рабочим газом, $\rho_w=0$. Часть потока атомов на стенку, равная $1-\rho_w$, вновь поступает в плазму. Здесь опять происходит частичное отражение нейтралов из-за перезарядки, и описанная цепочка процессов повторяется. Полный поток, поглощаемый стенкой, Φ_w находим, суммируя потоки, сорбируемые при каждом акте взаимодействия со стенкой:

$$\begin{aligned}\Phi_w &= J^* \frac{1+A_l}{2} [\rho_w + (1-\rho_w)A_l\rho_w + (1-\rho_w)A_l(1-\rho_w)A_l\rho_w + \dots] = \\ &= \frac{J^*(1+A_l)\rho_w}{2[1-(1-\rho_w)A_l]}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Некоторая доля ρ_s потока нейтралов со стенки ионизуется в лимитерном слое. Зависимость ρ_s от параметров плазмы в SOL найдена в [40]. Следовательно, полное число атомов, ионизирующихся в периферийной области в единицу времени, и равный ему в стационарном состоянии диффузионный поток плазмы в SOL составляют:

$$\begin{aligned}\Gamma_s &= \frac{J^*(1-A_l)}{2} + \left[\frac{J^*(1+A_l)}{2} - \Phi_w \right] (1-\rho_s) = \\ &= \frac{J^*(1-A_l)}{2} \frac{1+(1-\rho_w)[1-(1+A_l)\rho_s]}{1-(1-\rho_w)A_l}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Поток Γ_s может быть связан с плотностью плазмы на границе пристеночной и полностью ионизованной областей разряда, n_0 , на основе соображений, развитых в гл. 2.

В случае, когда SOL непрозрачен для нейтралов, параметры плазмы неоднородны вдоль магнитного поля не только в лимитерном слое, но и, как показано в § 2.6, в периферийной области. Примем, что здесь вблизи лимитера на глубине проникновения атомов температура близка к T_p , а плотность меняется по x от n_r до n_0 . Следовательно, для толщины периферийной области x_0 имеем оценку: $x_0 \approx [n_w \sigma_*(T_p)]^{-1}$, где $n_w = (n_0 + n_r)/2$ — средняя плотность в месте ионизации атомов, поступающих из SOL.

Находим Γ_s , полагая поперечный градиент плотности в периферийной области приближенно равным $(n_0 - \langle \hat{n} \rangle) / x_0$:

$$\Gamma_s \approx S_0 D_{\perp}^w \frac{n_0 - \langle \hat{n} \rangle}{x_0} \approx \frac{1}{2} S_0 D_{\perp}^w \sigma_* (n_0 - \langle \hat{n} \rangle) (n_0 + n_r), \quad (4.11)$$

где D_{\perp}^w — средний в области коэффициент диффузии. В случае

$$D_{\perp} = A_D / n$$

$$\Gamma_s \approx S_0 A_D \sigma_* \frac{(n_0 - \langle \hat{n} \rangle) (n_0 + n_r)}{n_0 + \langle \hat{n} \rangle}. \quad (4.12)$$

В пределе слабого рециклинга в SOL $\langle \hat{n} \rangle \approx n_r \ll n_0$ и (4.11) переходит в (2.17).

Параметры плазмы в основной части SOL (\hat{n} , \hat{T}) и в области рециклинга (n_r , T_p) связаны соотношениями, приведенными в § 3.3.

Соотношения (4.10), (4.11) позволяют связать поток нейтралов из области рециклинга J^* с величиной n_0 , которая определяется средней плотностью плазмы в разряде \bar{n} , измеряемой экспериментально. Это дает возможность рассчитывать параметры плазмы в SOL токамака с лимитером при заданных значениях \bar{n} и потока тепла из центра разряда в пристеночную область Q_0 .

В разрядах с напуском газа стационарное состояние плазмы поддерживается за счет компенсации потоком газа Φ_g поглощения атомов в стенке: $\Phi_g = \Phi_w$. В этом случае (4.9) позволяет найти связь Φ_g с n_0 , n .

4.3. Откачные лимитеры

Откачные лимитеры являются механическими аналогами диверторов. При этом роль сепаратрисы, вне которой силовые линии пересекают диверторные пластины, играет магнитная поверхность, касающаяся кромки лимитера. Принцип действия откачных лимитеров основан на том, что часть потока атомов из SOL, J^* попадает в специальный объем, где тем или иным образом организована откачка. Рассмотрим откачные лимитеры различных типов.

Открытый откачной лимитер. Простейший лимитер такого типа схематически изображен на рис. 30. В данном случае поверхность лимитера, воспринимающая тепловой поток, является одновременно поверхностью, на которой формируется поток нейтралов, поступающий в систему откачки.

Важной характеристикой эффективности работы открытого откачного лимитера является доля ξ_p потока нейтралов из плаз-

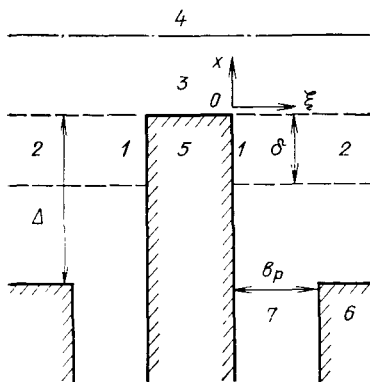


Рис. 30. Открытый откачной лимитер:

1 — область рециклинга; 2 — основная часть SOL; 3 — периферийная область; 4 — основная часть разряда; 5 — лимитер; 6 — стенка; 7 — откачиваемая полость

мы, попадающих в откачиваемый объем. В [69] ξ_p найдено в предположениях: а) для ионов, падающих на лимитер, $R_N, R_E \approx 0,5$; б) SOL прозрачен для отраженных атомов, имеющих косинусоидальное распределение по направлениям скорости:

$$\xi_p = \frac{1}{4\pi^2\delta_\Gamma} \int_{-\Delta}^0 dx \int_0^{b_p} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(x/\delta_\Gamma)\xi(\Delta+x)}{[\xi^2 + (\Delta+x)^2 + z^2]^2} dz, \quad (4.13)$$

где $\delta_\Gamma \approx \delta_n$ — характерная длина спада потока плазмы на лимитер.

На рис. 31 представлены зависимости ξ_p от b_p , построенные в [69] для ряда значений δ_Γ при $\Delta = 3\delta_\Gamma$.

Баланс частиц в откачиваемом объеме V_p имеет вид:

$$V_p dn_g/dt = -\dot{V}n_g + J^*\xi_p/2 - L_0 b_p n_g v_g/4, \quad (4.14)$$

где n_g — плотность газа (предполагается, что это молекулы с температурой стенок и тепловой скоростью v_g); \dot{V} — объемная скорость откачки.

Интегрируя (4.14), получаем:

$$n_g = J^*\xi_p\tau_c [1 - \exp(-t/\tau_c)] / (2V_p),$$

где $\tau_c = V_p / (\dot{V} + L_0 b_p v_g/4)$.

В квазистационарном пределе $t \gg \tau_c$ $n_g \sim J^*$. В случае SOL, прозрачного для нейтралов, $J^* \sim \Gamma^p \approx \Gamma_s$, т. е. с ростом средней плотности в разряде давление газа в системе откачки увеличивается пропорционально потоку плазмы в SOL: если коэффициент диффузии в периферийной области не зависит от n , $n_g \sim \bar{n}^2$; в случае скейлинга Alcator для $D_\perp n_g \sim \bar{n}$.

Ситуация качественно меняется, если Q_0 достаточно велик и с ростом \bar{n} и Γ_s происходит переход в состояние с сильным рециклингом плазмы на лимитере [70]. При этом, как следует из (3.58), n_g сильно нарастает с увеличением плотности плазмы в SOL.

На рис. 32 представлена зависимость от n_0 скорости откачки \dot{V} , необходимой для вывода из реактора-токамака масштаба INTOR потока несгоревшего топлива $\Gamma_0 = 10^{22} \text{ с}^{-1}$. При расчете

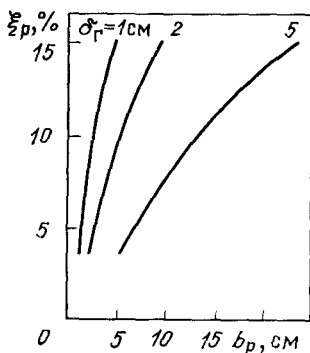


Рис. 31. Зависимость ξ_p от b_p и δ_r .

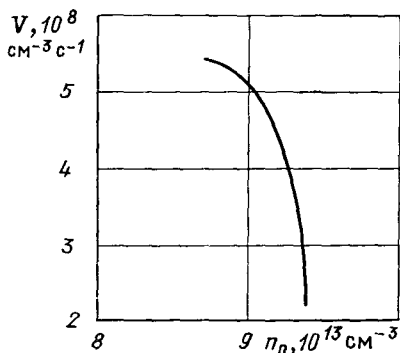


Рис. 32. Зависимость скорости откачки от плотности плазмы на границе пристеночной области реактора-токамака с открытым откачным лимитером

принято: $L_0 b_p = 13 \text{ м}^2$; $\xi_p = 1$; коэффициент диффузии в периферийной области и в SOL $1 \text{ м}^2/\text{с}$.

Закрытый откачной лимитер. В лимитере такого типа (рис. 33) поверхность, в основном воспринимающая тепловой поток (огневая), и поверхность, на которой формируется поток нейтралов в откачиваемый объем, разделены. Для обеспечения однородной тепловой нагрузки на огневую поверхность тороидального лимитера ее профиль должен описываться уравнени-

$$y(x) = \delta_q \{ (c^{-2} - 1)^{1/2} - \text{arctg} [(c^{-2} - 1)^{1/2}] - [c^{-2} \times \times \exp(2x/\delta_q) - 1]^{1/2} + \text{arctg} [c^{-2} \exp(2x/\delta_q) - 1]^{1/2} \},$$

где $c = L_0 \delta_q q_L / Q_0$; q_L — удельный тепловой поток на огневую поверхность; δ_q — характерная длина спада продольного потока тепла в SOL.

Если откачной канал достаточно удален от магнитной поверхности, касающейся кромки лимитера, $\delta_q \ll |x_{1,2}|$, процессы в нем слабо влияют на параметры плазмы в SOL. В этом случае их значения на входе в канал определяются рециклингом на огневой

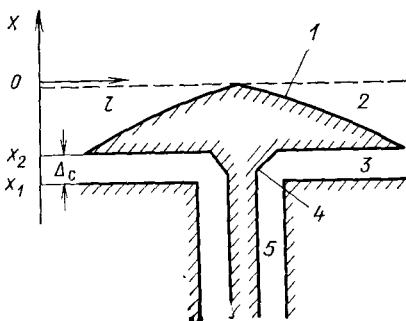


Рис. 33. Закрытый откачной лимитер: 1 — огневая поверхность; 2 — SOL; 3 — откачной канал; 4 — нейтрализационная поверхность; 5 — система откачки

поверхности. По этой же причине плотность плазмы в нем достаточно низка, так что канал прозрачен для атомов с температурой ионов, возникающих при перезарядке на холодных нейтралах, поступающих с нейтрализационной поверхности: $k_c n \ll v_i / \Delta_c$. Далее предполагается, что последние являются атомами с температурой стенок T_w .

Функция распределения по скоростям холодных атомов удовлетворяет уравнению (1.20б). Интегрируя (1.20б) по ширине канала, получаем:

$$v_l \frac{\partial F_0}{\partial l} = -(k_i^a + k_c) n F_0 - j_{0,x} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{1}{2\Delta_c}, \quad (4.15)$$

$$\text{где } F_0 = \int_{x_1}^{x_2} d\lambda / \Delta_c \int_{-\infty}^{\infty} f_0 d v_x; \quad j_{0,x} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x f_0 d v_x.$$

Если со стенок поступают атомы с функцией распределения $\varphi_0 = (1/2) [\delta(v_l - v_0) + \delta(v_l + v_0)]$, то

$$j_{0,x} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \approx F_0 v_0 - (N_0 v_0 + n_* v_i) \varphi_0,$$

где $v_0 = \sqrt{2T_w/m_a}$; N_0 , n_* — плотности холодных и перезарядившихся атомов.

При перезарядке атомы приобретают продольную скорость ионов $V_{||}$ и баланс частиц для них имеет вид

$$d(n_* V_{||})/dl = k_c n N_0 - n_* v_i / \Delta_c.$$

На стенку канала приходят горячие атомы, возникающие при $l - \Delta_c V_{||} / v_i$.

С учетом сказанного в предположении малости Δ_c по сравнению с характерным размером изменения параметров вдоль l из (4.15) находим уравнения для N_0 и плотности потока холодных атомов $j_0 = \int_{-\infty}^{\infty} F_0 v_i d v_l$:

$$d j_0 / dl = -k_a n N_0; \quad j_0 = -D_a d N_0 / dl + V_a N_0. \quad (4.16)$$

Здесь $D_a = \Delta_c v_0 / (1 + \Delta_c / l_0)$ — коэффициент диффузии, обусловленной хаотизацией импульса атомов при столкновениях со стенками канала; $V_a = \Delta_c k_c n V_{||} / v_i$ — скорость конвекции из-за наличия направленной скорости u атомов, возникающих при перезарядке; $l^{-1}_0 = l^{-1}_i + l^{-1}_c$; $l_c = v_0 / (k_c n)$; $l_i = v_0 / (k_a n)$.

Совместно с уравнениями переноса заряженных частиц (4.16) позволяет рассчитать параметры плазмы и газа в откатном канале. Мы же ограничимся рассмотрением качественной зависимости плотности холодных нейтралов от параметров плазмы в SOL.

Считая, что с удалением от нейтрализационной поверхности N_0 и параметры плазмы меняются с некоторым характерным размером L , из (4.16) и (3.1), (3.2) находим:

$$N_0 \approx V_s L^{-1} / (k_i^a + k_c); \quad (4.17)$$

$$\frac{D_\alpha}{L^2} - \frac{\Delta_c v_0'}{l_c l_i L} - \frac{v_0}{l_i} = 0. \quad (4.18)$$

Из (4.18) следует, что при $\Delta_c^2 \ll l_i l_c$ $L \approx \sqrt{\Delta_c l_i}$; в обратном случае $L \approx l_c l_i / \Delta_c$. Поэтому с ростом плотности в SOL меняется характер зависимости N_0 от n_s :

$$N_0 \approx \frac{V_s}{k_i^a + k_c} \sqrt{\frac{k_i^a n_s}{\Delta_c v_0}} \quad \text{при} \quad n_s \leq \frac{v_0}{\Delta_c \sqrt{k_i^a k_c}};$$

$$N_0 \approx \frac{V_s \Delta_c k_i^a k_c}{(k_i^a + k_c) v_0^2} n_s^2 \quad \text{при} \quad n_s \geq \frac{v_0}{\Delta_c \sqrt{k_i^a k_c}}.$$

С увеличением n_s возрастает роль перезарядки, которая приводит к компрессии газа вблизи нейтрализационной поверхности.

Полученный результат качественно согласуется с данными численного моделирования с использованием метода Монте-Карло для описания нейтралов в откачном канале [65].

4.4. Сравнение с экспериментом

Приведенные результаты теоретических исследований плазмы в SOL токамака с лимитером хорошо согласуются с данными экспериментов.

Различие характерных длин спада плотности плазмы в SOL вблизи и вдали от лимитера обнаружено в токамаке TEXTOR [21]: 0,75 и 1,6 — 3 см соответственно. Вычисления по формулам (4.3) при типичных значениях $H_s = 1$ м²/с; $L_s = \pi R = 5,5$ м; $T_s = 15$ эВ; $\alpha_n = 0,8$; $\beta_n = \eta_* = 0,5$ дают значения 0,8 и 2,2 см. Важность учета зависимости длины силовой линии от полоидального угла в случае рельсового лимитера показана в [65]. В хорошем согласии с данными экспериментов расчеты показали, что уровни плотности в SOL T-10 при различных значениях θ различаются в несколько раз.

Переход в состояние сильного рециклинга плазмы в лимитерном слое наблюдался в токамаках DIII, Alcator и др. На рис. 34 показана измеренная зависимость интегральной интенсивности излучения атомов водорода в линии H_α вблизи рельсового лимитера DIII, расположенного на внешнем обводе тора, от средней плотности плазмы в токамаке [71]. Здесь же приведена расчетная зависимость потока плазмы на лимитер Γ^P от \bar{n} . Зависимости согласуются количественно, если учесть, что D_α и

Γ^P связаны через множитель Хиннова: $H_\alpha \approx \Gamma^P/14$. В расчете принималось $n_0 = 0,8\bar{n}$; $Q_0 = 1,2$ МВт; $S_0 = 24,6$ м²; $L_0 = 0,5$ м; коэффициенты переноса плазмы в SOL — боровские; в периферийной области принят скейлинг $D_\perp = A_D/n$ с $A_D = 10^{17}$ см⁻¹·с⁻¹.

Переход в состояние сильного рециклинга может быть одним из механизмов, стимулирующих развитие явлений типа MARFE [72] — полоидально-несимметричных сильноизлучающих областей холодной плотной плазмы преимущественно на внутреннем обводе тора. Иной механизм возникновения MARFE из-за охлаждающей неустойчивости на примесях рассматривается в гл. 5. Как показано в [43, 68], MARFE может появиться в результате касания плазменного шнура первой стенки. Область касания локализована в полоидальном направлении и играет роль тороидального лимитера. При потоке тепла в SOL, превышающем критическое значение $Q_{кр} = 2 \times 2\pi R_w q_{кр} \sin \psi$, происходит переход в состояние сильного рециклинга. Здесь R_w — большой радиус области контакта плазмы со стенкой; $\sin \psi \approx B_\theta/B_\phi$. Так как тороидальное магнитное поле меняется как R_w^{-1} , $Q_{кр} \sim R_w^2$. Следовательно, переход в состояние с холодной плотной плазмой на внутреннем обводе происходит при меньших Q_0 , чем на внешнем обводе. При Q_0 , превышающем $Q_{кр}$ для любого R_w , с ростом плотности плазмы состояние с сильным рециклингом на первой стенке может возникать как на внутреннем, так и на внешнем обводах. Сказанное может объяснить результаты экспериментов на токамаке T-10 [68]. Их демонстрирует рис. 35, где показаны радиальные профили плотности на стадиях с чисто омическим нагревом и при включении ЭЦР-нагрева мощностью 1,9 МВт. Кривые 2 и 3 соответствуют различным значениям \bar{n} . При достаточно больших \bar{n} и мощности вкладываемой в разряд область с высокой плотностью возникает на внешнем обводе. Отметим, что условия развития охлаждающей неустойчивости требуют, напротив, уменьшения потока тепла на периферию (см. § 5.6).

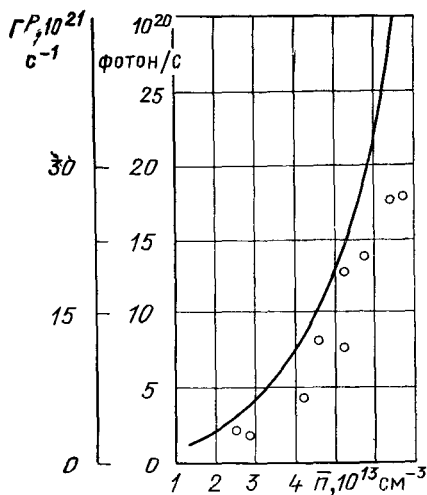


Рис. 34. Экспериментальная зависимость интенсивности H_α излучения атомов водорода на линии вблизи лимитера DIII (точки) [71] и расчетная зависимость потока плазмы на лимитер (кривая) от средней плотности \bar{n}

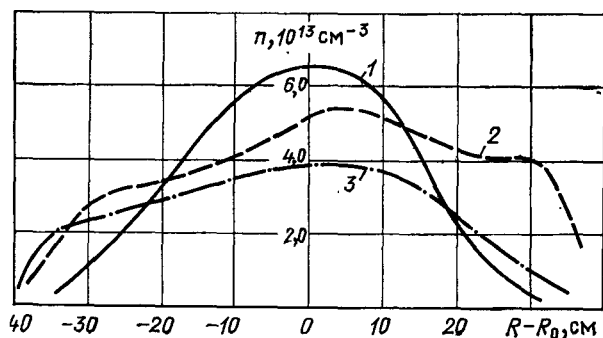


Рис. 35. Измеренные профили плотности плазмы в T-10 при различных значениях мощности ЭЦР-нагрева и \bar{n} :

1 — $W=0$, $\bar{n}=3 \cdot 10^{13}$ см⁻³; 2 — $W=1,9$ МВт, $\bar{n}=3 \cdot 10^{13}$ см⁻³; 3 — $W=1,9$ МВт, $\bar{n}=1,5 \cdot 10^{13}$ см⁻³

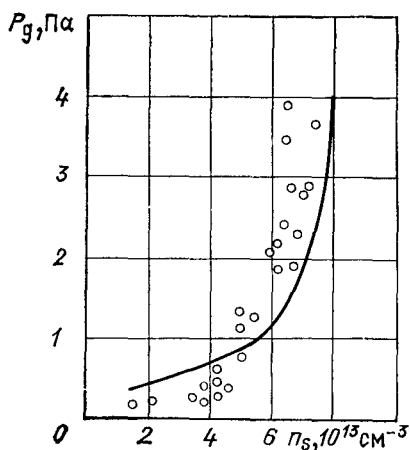


Рис. 36. Зависимость давления газа в откачном лимитере Alcator-A от плотности плазмы в SOL:

точки — данные измерений; кривая — результаты расчета

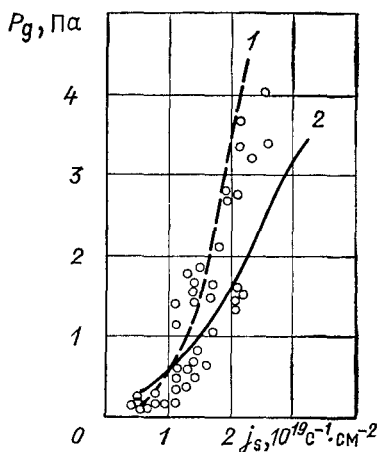


Рис. 37. Зависимость давления газа в откачном лимитере T-10 от j_s :

точки — данные эксперимента; 1 — результаты расчетов методом Монте-Карло [65]; 2 — результаты вычислений по формулам (4.17), (4.18)

Переход в состояние сильного рециклинга в SOL был обнаружен при исследовании в Alcator-A откачного лимитера с открытой геометрией [69]. На рис. 36 показана экспериментальная зависимость давления газа в системе откачки P_g от плотности плазмы в SOL; здесь же представлена расчетная зависимость, полученная в [70].

Режимы с высокой компрессией газа в откачном патрубке лимитера с закрытой геометрией получены на установке Т-10. Рисунок 37 демонстрирует измеренную зависимость давления в откачиваемом объеме P_g от ионного тока на зонды на входе в откачной канал j_s . Сильно нелинейная зависимость P_g от j_s в режиме компрессии ($j_s \geq 10^{19} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$) объясняется следующим. При заданном потоке тепла на лимитер температура плазмы падает обратно пропорционально j_s . Поскольку $j_s = n_s V_s$, получаем $n_s \sim j_s^{3/2}$ и $N_0 \sim V_s n_s^2 \sim j_s^{5/2}$.

Глава 5

ПРИМЕСИ В ПРИСТЕНОЧНОЙ ПЛАЗМЕ ТОКАМАКА

5.1. Поступление примесей в плазму

Механизмы поступления примесей в плазму токамака с ограничивающих ее материальных поверхностей широко изучаются экспериментально и теоретически [18, 73].

На квазистационарной стадии разряда основным источником металлических примесей является физическое (катодное) распыление. Другие каналы эрозии, такие как электрические дуги, плавление при локальном нагреве, играют и, по-видимому, будут играть существенную роль в реакторах лишь на конечной и начальной стадиях разряда, при больших срывах.

Процесс физического распыления имеет пороговый характер. Пороговая энергия E_t зависит от энергии сублимации материала мишени E_B и отношения масс атомов мишени и распыляющих частиц, m_I и m_i , соответственно. Согласно [18] $E_t = E_B / (1 - \gamma_I) / \gamma_I$ при $m_i \leq 0,3m_I$ и $E_t \approx 8E_B (m_i / m_I)^{2/5}$ при $m_i \geq 0,3m_I$, где $\gamma_I = 4m_i m_I / (m_i + m_I)^2$. В настоящее время для описания распыления используется кинетическая теория каскадов столкновений атомов мишени, вызванных взаимодействием с бомбардирующей частицей [74]. Она дает хорошее согласие с опытными данными. Однако на практике обычно применяют аппроксимационные полуэмпирические соотношения для коэффициента распыления Y , определяемого как отношение потока распыленных частиц к потоку падающих частиц, имеющих энергию E и угол падения θ .

Вблизи порога распыления зависимость $Y(E, \theta)$ описывается соотношением, приведенным в [75]:

$$Y(E, \theta) = 6,4 \cdot 10^{-3} \frac{m_I}{m_i} \gamma_I^{5/3} \left(\frac{E}{E_t} \right)^{1/4} \left(1 - \frac{E_t}{E} \right)^{7/2} j(\theta). \quad (5.1)$$

При $\theta \leq 70^\circ$ $f(\theta) \approx \cos^v \theta$, где v меняется в зависимости от E и вида распыляющих частиц в интервале $1 \leq v \leq 2$. При $\theta = 70 \div 80^\circ$ f достигает максимума, а затем убывает с увеличением θ , что обусловлено отражением бомбардирующих частиц от поверхности.

Коэффициент распыления достигает максимума при $E \approx E_m = 50z_i z_I$, где $z_{i,I}$ — атомные номера бомбардирующих частиц и атомов мишени; E, E_m — в эВ. Вблизи максимума для Y справедливо соотношение [76]

$$Y(E, \theta) = \frac{20}{E_B} z_i^2 z_I^2 \frac{m_i}{m_I} \frac{E}{(E + E_m)^2} f(\theta). \quad (5.2)$$

Основной вклад в распыление материальных поверхностей в термоядерных установках вносят ионы изотопов водорода и примесей, которые ускоряются в дебаевском скачке потенциала φ_s . В слой объемного заряда ионы водорода входят со средней скоростью в направлении, перпендикулярном поверхности, близкой к скорости ионного звука. Функция распределения ионов на поверхности имеет вид [77]

$$f_i = j_i \frac{m_i}{T^2} \varphi_i \exp \left[-\frac{m_i v_{\parallel}^2}{2T} - \left(\sqrt{\frac{m_i v_{\perp}^2}{2T} - \epsilon_0} - 1 \right)^2 \right],$$

где j_i — плотность потока ионов; $v_{\perp, \parallel}$ — составляющие скорости, перпендикулярно и параллельно поверхности; $\varphi_i = \{e^{-1} + \sqrt{\pi} [1 + \operatorname{erf}(1)]\}^{-1} / (2\pi)$ — нормировочная константа; $\epsilon_0 = e\varphi_s / T$; в случае примесей с зарядом z $\epsilon_0 = ze\varphi_s / T$.

Интенсивность распыления характеризуется усредненным коэффициентом распыления:

$$S_i = 2\pi \left(\int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} / \sqrt{2e\varphi_s / m_i} \right) \int_0^{\infty} v_{\parallel} (j_i / j_i) Y [(m_i / 2)(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2), \operatorname{arctg}(v_{\parallel} / v_{\perp})] dv_{\parallel}. \quad (5.3)$$

Зависимости S_i от T , рассчитанные в [78], представлены на рис. 38.

При фиксированных E и θ Y зависит от энергии E_s и угла θ_s между нормалью к поверхности и направлением скорости распыленных частиц. Согласно [79] $Y \sim E_s / (E_s + E_B)^3$; при нормальном падении бомбардирующих частиц $Y \sim \cos \theta_s$. Средняя скорость распыленных частиц равна

$$v_i = (3\pi/8) \sqrt{2E_B / m_i}. \quad (5.4)$$

Распыление большинства материалов происходит в виде нейтральных атомов, которые могут проникать достаточно глубоко в плазму. Ряд веществ с высокой работой выхода распы-

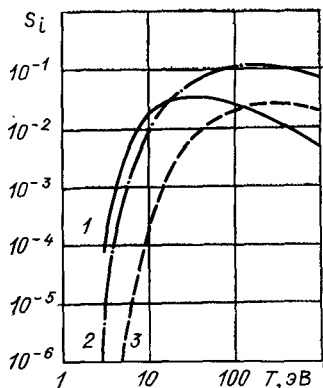


Рис. 38. Зависимость коэффициента распыления углерода (1), железа (2) и молибдена (3) ионами трития, ускоренными в ленгмюровском скачке потенциала, от температуры плазмы

ляется в виде ионов. Если магнитное поле наклонено к поверхности под малым углом, то большинство распыленных ионов сталкиваются с ней при первом же обороте по ларморовской окружности, что приводит к снижению эффективного коэффициента распыления [80].

Важным каналом поступления легких неметаллических примесей (С, О) является стимулированная десорбция и химическое распыление в результате реакции на поверхности с образованием таких соединений, как CH_4 , CO и т. п. Теоретически эти процессы изучены еще недостаточно и при рассмотрении влияния легких примесей на энергетический баланс пристеночной плазмы их концентрацию будем считать заданной.

5.2. Перенос примесей в периферийной области

Уравнения баланса частиц. В периферийной области (вне SOL) балансы частиц примеси описываются системой одномерных уравнений непрерывности для атомов и ионов разной кратности ионизации [81]:

$$dn^0_I v_I / dx = -n^0_I n k_i^0 + R_{1,0} n^1_I; \quad (5.5)$$

$$d\Gamma_{\perp}^z / dx = -n_I^z n k_i^z + n_I^{z-1} n k_i^{z-1} - R_{z,z-1} n_z + R_{z+1,z} n_{z+1}, \quad (5.6)$$

где n^0_I , n^z_I — плотности атомов и ионов примеси, $k^{0,z}_i$ — константы ионизации; R — скорости рекомбинации.

Для пристеночной плазмы основными видами рекомбинации являются излучательная и диэлектронная. При некоторых условиях важную роль играет перезарядка на атомах водорода. Данные о константах элементарных процессов приведены в [82].

В случае так называемого коронального равновесия, когда в балансе частиц примеси основную роль играют ионизация, излучательная и диэлектронная рекомбинация, распределение ионов по зарядовым состояниям определяется только температурой электронов. Зависимости среднего заряда в корональном приближении z_c от T_e приведены в [82] практически для всех элементов периодической таблицы.

В поперечном потоке ионов Γ_{\perp}^z учитываются следующие

составляющие [83]: поток, обусловленный аномальной диффузией

$$\Gamma_{\perp,a}^z = -D_{\perp,a}^z n_I^z / dx,$$

где коэффициент $D_{\perp,a}^z$ принимается обычно одинаковым для всех z и совпадающим с коэффициентом для основной плазмы D_{\perp} ; неоклассический поток $\Gamma_{\perp,n}^z$; оценки показывают, что для типичных параметров пристеночной плазмы ионы примеси находятся в пфиршшлотеровском режиме процессов переноса [84]:

$$\Gamma_{\perp,n}^z = \frac{A_i q^2}{T^{3/2}} \left[2zn_I^z T \frac{dn}{dx} - (2+z)nn_I^z \frac{dT}{dx} - 2nT \frac{dn_I^z}{dx} \right],$$

где q — коэффициент запаса; $A_i = (4/3)\sqrt{2\pi m_i}(e^2 c^2 \Lambda_c / B_0^2)$; B_0 — напряженность магнитного поля.

Конвективной составляющей в Γ_{\perp}^z , например, за счет аномального пинч-эффекта, в пристеночной области пренебрегается.

Конфигурация без SOL [81, 83]. Если плазма ограничена только первой стенкой, уравнения (5.5), (5.6) применимы во всей пристеночной области. Поскольку оценки показывают, что ионизация атомов примеси, как правило, превалирует над их источником за счет рекомбинации, решение (5.5) в данном случае имеет вид

$$n_I^0 = \frac{j_I}{v_I} \exp\left(-\int_0^x \frac{nk_I^0}{v_I} dx\right), \quad (5.7)$$

где j_I — поток примесных атомов со стенки.

Суммируя уравнения (5.5), (5.6) по всем z и интегрируя по x при условии отсутствия потока примеси в пристеночную область из центра разряда, получаем:

$$\bar{z} D_n \frac{d \ln n}{dx} n_I - D_{\perp} \frac{dn_I}{dx} + j_I \exp\left(-\int_0^x \frac{nk_I^0}{v_I} dx\right) = 0, \quad (5.8)$$

где $n_I = \sum_{z \geq 1} n_I^z$; $\bar{z} = \sum_{z \geq 1} zn_I^z / n_I$; $D_n = 2A_i q^2 n / \sqrt{T}$.

При выводе (5.8) учтено, что коэффициент неоклассической диффузии D_n мал по сравнению с D_{\perp} , а T меняется в пристеночной области слабее n .

Длина пробега атомов примеси до ионизации $l_I = v_I / (k^0 n)$ мала по сравнению с толщиной периферийной области x_0 , которая близка к $l_* = 2 / (n_0 \sigma_*)$, из-за различия в массах основных

и примесных частиц. Поэтому можно выделить две подобласти.

Подобласть 1 ($x \leq l_I$), где происходит ионизация атомов примеси. Здесь неоклассический перенос несуществен, поскольку характерный размер изменения параметров основной плазмы порядка l_* , а плотности ионов примеси l_I . Для рассмотренных в гл. 2 частных случаев зависимости $D_{\perp}(n)$ профиль $n_I(x)$ находится аналитически:

а) $\gamma_n = 0$, $D_{\perp}(x) = \text{const}$. Разлагая (2.20) в ряд при $s \ll 1$ и интегрируя (5.8), получаем

$$n_I = n_{I,1} \operatorname{erf}(x/l_I) + n_I|_{x=0},$$

где $n_{I,1} = \sqrt{\pi} j_I l_I / (2D_{\perp})$; $l_I = 2/n_0 \sqrt{v_I / (\sigma_* k_i^0)}$;

б) $\gamma_n = -1$, $D_{\perp} = A_D/n$. Используя (2.21), находим

$$n_I = n_{I,2} \left\{ 1 - \exp \left\{ - \frac{k_i^0 \sqrt{v_w}}{v_I \sigma_*} [\exp(\sigma_* n_0 x) - 1] \right\} \right\} + n_I|_{x=0},$$

где $n_{I,2} = j_I v_I / (A_D k_i^0)$.

Если плотность ионов на стенке мала по сравнению с $n_{I,1,2}$, эти значения можно принять для n_I на границе подобласти 1.

Подобласть 2 ($x \geq l_I$). Здесь последний член в (5.8) пренебрежимо мал и для плотности примеси на границе периферийной области имеем:

$$n_{I,1,2}^w = n_{I,1,2} \exp(\tilde{z} \alpha_n), \quad (5.9)$$

где $\tilde{z} = \int_0^{n_0} z D_n dn / (D_{\perp} n)$; $\alpha_n = \int_0^{n_0} D_n dn / (D_{\perp} n)$;

$$\alpha_n = D_n(n_0) / D_{\perp} \text{ при } \gamma_n = 0; \alpha_n = D_n(n_0) n_0 / (2A_D)$$

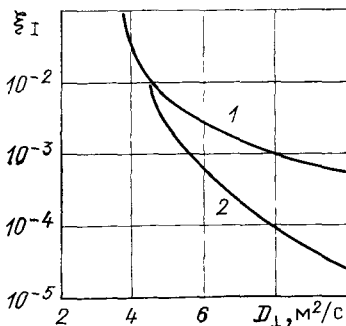
при $\gamma_n = -1$.

Для типичных значений параметров ($q=3$, $B_0=3$ Тл, $n_0 = 3 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$, $T_p=20$ эВ, $D_{\perp} = 1$ м 2 /с) $\alpha_n = 0,2$. Следовательно, при \tilde{z} , превышающем $\alpha_n^{-1} \approx 5$, неоклассический перенос приводит к сильному возрастанию плотности примесных ионов в подобласти 2.

Для определения \tilde{z} необходимо решить систему уравнений (5.6), при этом в первом приближении можно воспользоваться следующими соображениями. Характерное время, которое ионы примеси находятся в периферийной области, равно $\tau_w \approx \approx l_*^2 / (D_n + D_{\perp})$. При этом они успевают ионизоваться до состояния с зарядом z_w таким, что

$$\tau_w \approx \sum_{z=1}^{z_w-1} (n k_i^z)^{-1}.$$

Рис. 39. Зависимость относительной концентрации примеси в реакторе-токамаке от коэффициента диффузии в периферийной области для первой стенки из стали (1) и молибдена (2)



Если z_w меньше $z_c(T_P)$, то $\bar{z} \approx z_w$, в противном случае $\bar{z} = z_c$, так как рекомбинация препятствует увеличению z по сравнению с z_c .

При определении j_I примем, что в водородной плазме помимо металлических примесей, распыляемых со стенки, присутствуют легкие примеси. В таком случае

$$j_I = \Gamma_P (S_i + \alpha_i S_i) / (1 - S_s), \quad (5.10)$$

S_i , S_s — коэффициенты распыления стенки легкими примесями и собственными ионами (самораспыления); α_i — отношение потока легких примесей на стенку к Γ_P .

Используя (2.17), находим:

$$n_{I,k}^w \approx \frac{S_i + S_i \alpha_i}{1 - S_s} \left(\frac{v_i \sigma_*}{k_i^0} \right)^{k/2} \exp(\tilde{z} \alpha_n) n_0. \quad (5.11)$$

Плотность примесей в центре разряда пропорциональна n^w_I и (5.11) позволяет исследовать эффективность повышения коэффициентов переноса в пристеночной области — турбулентного плазменного blankets — как способа уменьшения содержания примесей в реакторе. Отметим, что вывод [81] о падении n^w_I с ростом D_{\perp} из-за усиления переноса примеси неверен, поскольку в [81] не учитывалось, что при этом также растет Γ_P , а следовательно и поток распыленных атомов. Как следует из (5.11), основная причина снижения n^w_I — уменьшение коэффициентов распыления и заряда примесей в пристеночной области из-за падения температуры плазмы.

На рис. 39 представлены результаты расчета зависимости концентрации примеси $\xi_I = n^w_I / n_0$ от коэффициента диффузии в периферийной области установки масштаба INTOR с первой стенкой из нержавеющей стали и молибдена. При вычислениях принималось, что $\gamma_n = 0$, заряд металлических примесей, бомбардирующих стенку, равен \tilde{z} , легкие примеси отсутствуют. Увеличение D_{\perp} до уровня 5 м²/с ограничивает концентрацию примесей на уровне ниже опасного для термоядерного горения.

5.3. Динамика примесей в SOL

Гидродинамическое описание. Для изучения поведения примесей в SOL часто используется так называемая *модель пробной жидкости* [7, 85], основанная на раздельном гидродинами-

ческом описании ионов с разными зарядами в предположении их низкой концентрации — $\sum_z n_z^2 z^2 / n \ll 1$. В этом случае можно

пренебречь столкновениями примесных ионов и их влиянием на движение водородной плазмы. Каждое ионизационное состояние связано с другими через процессы ионизации и рекомбинации, с фоновой плазмой — через кулоновские столкновения и продольное электрическое поле. Температура ионов примеси принимается равной T_i .

Уравнения непрерывности и движения вдоль магнитного поля для примеси имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial n_i^z / \partial t + \partial (n_i^z V_{\parallel}^z) / \partial l = & - (k_i^z n + R_{z,z-1}) n_i^z + \\ & + k_i^{z-1} n n_i^{z-1} + R_{z+1,z} n_i^{z+1}; \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \partial (\rho_z V_{\parallel}^z) / \partial t + \partial [\rho_z (V_{\parallel}^z)^2 + n_i^z T_i] / \partial l = & n_i^z z e E_{\parallel} + \rho_z (V_{\parallel} - V_{\parallel}^z) / \tau_z + \\ + \alpha_z n_i^z \partial T_i / \partial l + \beta_z n_i^z \partial T_i / \partial l + k_i^{z-1} n \rho_{z-1} V_{\parallel}^{z-1} + & R_{z+1,z} \rho_{z+1} V_{\parallel}^{z+1}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $\rho_z = m_i n_i^z$; $\tau_z = 3T_i^{3/2} m_i^2 / [4 \sqrt{2} \pi m_i e^4 z^2 n \Lambda_c (m_i + m_j)]$; α_z, β_z — коэффициенты термосил, обусловленных столкновениями с ионами примеси электронов и фоновых ионов соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_z = 0,71 z^2; \beta_z = -3 \frac{1 - M_I - 5\sqrt{2} (1,1 M_I^{5/2} - 0,35 M_I^{3/2}) z^2}{2,6 - 2M_I + 5,4 M_I^2}; \\ M_I = m_i / (m_i + m_j). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Термосила направлена в сторону увеличения температуры плазмы, т. е. она препятствует уходу примеси вдоль магнитного поля в диверторный объем. Этот эффект наиболее существен в режиме сильного рециклинга плазмы в диверторе или на лимитере, когда в SOL имеется большой перепад температур, а скорость течения в основной части SOL мала по сравнению со скоростью звука. Как видно из уравнения (5.13), при $V_{\parallel} / V_s \ll \ll \lambda_c d \ln T / dl$ силой трения можно пренебречь. Суммируя (5.13) по всем z , для сильноионизованной примеси в изотермической плазме находим ($\partial / \partial t = 0$):

$$T \partial n_i / \partial l \approx 3,36 \bar{z}^2 n_i \partial T / \partial l, \quad (5.15)$$

где $\bar{z}^2 = \sum_{z>1} z^2 n_i^z / n_i$. Отсюда следует: $n_i \sim T^{3,36 \bar{z}^2}$, т. е. в резуль-

тате действия термосилы плотность примеси в основной части SOL должна резко нарастать с удалением от дивертора или лимитера. Эти оценки подтверждают результаты [85], где

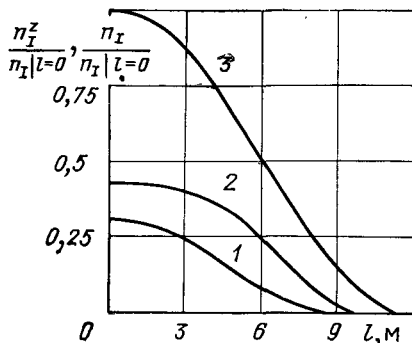


Рис. 40. Изменение вдоль SOL токамака ASD EX отношений плотностей ионов железа с $z=9$ (1), $z=8$ (2) и полной плотности примеси (3) к значению n_I в плоскости симметрии SOL

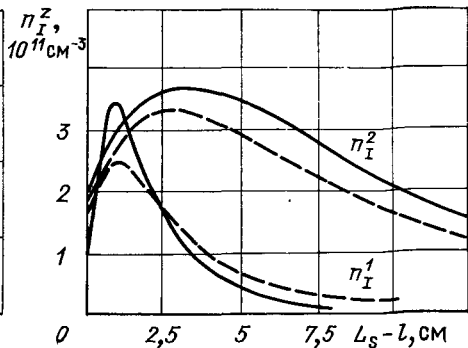


Рис. 41. Профили плотности одно- и двухзарядных ионов железа, поступающих с лимитера, рассчитанные по кинетической модели (—) и модели пробных частиц (---)

уравнения (5.12), (5.13) решались численно. На рис. 40 представлены расчетные профили в SOL относительных концентраций ионов железа с различным z . При расчетах принималось, что источник примеси сосредоточен в плоскости симметрии SOL. Параметры плазмы и геометрические размеры были приняты соответствующими установке ASDEX, число Маха в основной части SOL не превышало 0,03.

Кинетическое описание. Гидродинамическое приближение, как правило, справедливо для частиц примеси, поступающих в SOL из основной плазмы или с первой стенки. Для них характерный размер изменения параметров порядка L_S и превышает длину пробега до кулоновских столкновений с частицами фоновой водородной плазмы. Иная ситуация с примесями, возникающими при распылении лимитера или диверторных пластин. Их распределение по скоростям сильнонеравновесно, и необходимо кинетическое описание.

Кинетическая модель описания примесей в SOL развита в [77, 86]. Уравнение для функции распределения по скоростям $f_z(l, v_{\parallel}, v_{\perp})$ ионов с зарядом z принято в виде

$$v_{\parallel} \frac{\partial f_z}{\partial l} + \frac{zeE_{\parallel}}{m_I} \frac{\partial f_z}{\partial v_{\parallel}} = Q_z - k_i^z n f_z + \frac{1}{\tau_z} \frac{\partial s f_z}{\partial \tau}, \quad (5.16)$$

где Q_z — источник ионов.

Фоккер-планковский оператор $\partial_s/\partial \tau$, описывающий кулоновские столкновения примеси с водородными ионами, в прибли-

жении $m_i \ll m_I$ приводится к дифференциальной форме

$$\frac{\partial_s}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \omega_{\parallel}^2} + (\alpha_i \omega_{\parallel} - \beta_i) \frac{\partial}{\partial \omega_{\parallel}} + \frac{\alpha_i}{\omega_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \omega_{\perp}} \left(\omega_{\perp} \frac{\partial}{\partial \omega_{\perp}} \right) + \\ + \gamma_i \omega_{\perp} \frac{\partial}{\partial \omega_{\perp}} + 2\gamma_i,$$

где $\omega_{\parallel} = v_{\parallel}/v_i$; $\omega_{\perp} = v_{\perp}/(v_i \sqrt{2\varepsilon_i})$; α_i , β_i , γ_i , ε_i — интегралы от функции распределения фоновых ионов, приведенные в [77].

С новой переменной $\eta = c(l, v_{\parallel})v_{\perp}^2$ уравнение (5.16) приводится к виду

$$-v_{\parallel} \frac{\partial f_z}{\partial l} + Q_z + \frac{\alpha_i v_{\parallel} - \beta_* v_i}{\tau_z} \frac{\partial f_z}{\partial v_{\parallel}} - \\ - \left[k_i^2 n + (\Lambda_i - \alpha_i - 2\gamma_i) \frac{1}{\tau_z} \right] f_z = -\frac{1}{\tau_z} \frac{\partial s f_z}{\partial \tau_{\perp}}, \quad (5.17)$$

где

$$\beta_* = \beta_i + \frac{zeE_{\parallel}}{m_I v_i} \tau_z; \quad \Lambda_i = -v_{\parallel} \tau_z \frac{\partial \ln |c|}{\partial l} + \\ + (\alpha_i v_{\parallel} - \beta_* v_i) \frac{\partial \ln |c|}{\partial v_{\parallel}} + 2\gamma_i.$$

Дифференциальный оператор

$$\frac{\partial_s}{\partial \tau_{\perp}} = 8\varepsilon_i v_i^2 c \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \Lambda_i \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 1 \right) \quad (5.18)$$

имеет собственные функции $F_k(\eta)$, когда выполняется соотношение

$$\Lambda_i = 8\varepsilon_i v_i^2 c. \quad (5.19)$$

При условии $\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_k(\eta) = 0$ собственные значения и собственные функции (5.18) имеют вид $\Lambda_{i,k} = k\Lambda_i$; $F_k(\eta) = L_k(\eta) \exp(-\eta)$, где L_k — полиномы Лагерра порядка k .

Из (5.19) получаем дифференциальное уравнение для коэффициентов $c(l, v_{\parallel})$, которое может быть решено аналитически методом характеристик.

Представив f_z , Q_z в виде $f_z = \sum_k a_k(l, v_{\parallel}) F_k(\eta)$, $Q_z = \sum_k Q_k(l, v_{\parallel}) F_k(\eta)$, из (5.17) находим уравнения для коэффициентов разложения a_k :

$$-v_{\parallel} \frac{\partial a_k}{\partial l} + Q_k + \frac{\alpha_i v_{\parallel} - \beta_* v_i}{\tau_z} \frac{\partial a_k}{\partial v_{\parallel}} - \\ - \left[k_i^2 n + \frac{(k+1)\Lambda_i - (\alpha_i + 2\gamma_i)}{\tau_z} \right] a_k = 0. \quad (5.20)$$

Уравнение (5.20) решается методом характеристик. Для коэффициентов Q_k в пренебрежении рекомбинацией и перезарядкой на атомах водорода в [86] получено:

$$Q_k = \begin{cases} \int_0^\infty Q_N L_k(\eta) d\eta, & z = 1; \\ 0 & \\ \lambda_*^k k_i^{z-1} n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \lambda_*^{k-m} (1 - \lambda_*)^m Q_{k-m} |_{z-1}, & \end{cases}$$

где Q_N — источник за счет ионизации атомов примеси; $\lambda_* = \frac{c(l, v_{\parallel})|_z}{c(l, v_{\parallel})|_{z-1}}$,

$\binom{k}{m}$ — биномиальные коэффициенты.

Если известны коэффициенты разложения a_k , то моменты функции распределения легко вычисляются. В частности, для плотности и потока ионов примеси вдоль поля получено:

$$\left\{ \begin{matrix} n_z(l) \\ \Gamma_{\parallel}^z(l) \end{matrix} \right\} = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ v_{\parallel} \end{matrix} \right\} \frac{a_0(l, v_{\parallel})}{c(l, v_{\parallel})} \Big|_z. \quad (5.21)$$

Для силы, действующей на примесь, имеет место соотношение

$$F_{\parallel z} = \frac{m_I}{\tau_z} (\beta_* V_{\parallel} n_z - \alpha_i \Gamma_{\parallel}^z). \quad (5.22)$$

Результаты расчетов по данной модели, проведенные в [86], демонстрирует рис. 41. Здесь показаны профили вдоль магнитного поля ионов железа с различным z . Предполагалось, что примесь поступает с поверхности в виде атомов с температурой $T_0 = 2$ эВ; плотность и температура плазмы в SOL: $n = 3,2 \times 10^{12}$ см $^{-3}$, $T = 29$ эВ.

В кинетическую модель могут быть включены источники и стоки ионов примеси за счет объемной рекомбинации и перезарядки на атомах водорода. Однако за время пребывания в SOL примесей, поступающих с материальной поверхности, они не успевают ионизоваться до состояния, соответствующего корональному равновесию, так что скоростью рекомбинации можно пренебречь по сравнению со скоростью ионизации. Что касается перезарядки, ее роль может быть весьма существенной.

Модель пробных частиц. В качестве приближения к кинетической модели для примесей в SOL в [87, 88] была использована модель пробных частиц. В ней движение ионов вдоль магнитного поля рассматривается как движение сгустков частиц в сплошной среде фоновой плазмы, без учета перемешивания сгустков.

Рассмотрим эволюцию сгустка ионов, возникающего при ионизации вблизи точки (x_0, l_0) атомов, имеющих составляющую скорости вдоль магнитного поля v_l . В момент рождения плотность ионов в сгустке равна:

$$dn_l^1(x_0, l_0, v_l) = \left(\frac{k_l^0 n}{v_l} \right) dl_0 dv_l \int_{l_0}^0 f^0(v_x, v_l; x_0, l_0) dv_x,$$

где f^0 — функция распределения атомов примеси по скоростям.

С течением времени заряд ионов в сгустке возрастает. В [88] было принято, что z увеличивается на 1, если с момента предыдущей ионизации прошло время $\Delta t = (k^z n)^{-1}$.

Изменение координаты сгустка во времени описывается уравнением

$$m_I \frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{m_I}{\tau_z} \left(V_{\parallel} - \frac{dl}{dt} \right) + zeE_{\parallel} + (\alpha_z + \beta_z) \frac{dT}{dt}. \quad (5.23)$$

Модель пробных частиц не позволяет учесть максвеллизацию ионов примеси при кулоновских столкновениях с основными ионами, которая приводит к диффузионному расплыванию вдоль магнитного поля и перемешиванию отдельных сгустков. Оценки показывают, что за время движения ионов примеси, поступающей с лимитера или диверторной пластины, в SOL эти эффекты не должны качественно менять картины, следующей из модели пробных частиц. При отсутствии перемешивания линейная плотность примесных ионов в сгустках, равная интегралу от плотности по координате, перпендикулярной магнитному полю, меняется обратно пропорционально их скорости.

В [88] по модели пробных частиц рассчитывали профили в SOL вдоль магнитного поля плотностей ионов примеси с разными z . Параметры фоновой плазмы были приняты такими же, как и в [86]. Результаты расчетов представлены на рис. 41 штриховыми кривыми. Удовлетворительное согласие с данными, полученными по кинетической модели, имеется для одно- и двухзарядных ионов, времена ионизации которых малы по сравнению с временем пребывания примеси в SOL. Для более высокоионизованных примесей это условие нарушается и модель пробных частиц слишком груба: даваемые ей плотности существенно ниже приведенных в [86]. Однако таких примесей мало.

5.4. Экранирующие свойства SOL

Экранировка плазмы термоядерного реактора от примесей, возникающих при эрозии материальных поверхностей, является одной из основных функций, возлагаемых на SOL. Идея экранировки состоит, во-первых, в том, чтобы примесь, поступающая со стенок, ионизовалась в SOL и увлекалась течением плаз-

мы вдоль силовых линий магнитного поля в диверторный объем или на лимитер, а во-вторых, в уменьшении потока плазмы, достигающего стенки.

Экранировка примесей, поступающих с первой стенки [89]. В данном случае воспользуемся уравнениями (5.12), (5.13), дополнив их членами, учитывающими перенос частиц и продольного импульса при поперечной диффузии. В ситуации со слабым рециклингом на пластинах дивертора, рассмотренной в [89], скорость течения плазмы вдоль магнитного поля в SOL порядка скорости ионного звука и в (5.13) справа доминирует сила трения примесных ионов об основные. Для оценок в уравнении движения дифференцирование заменим делением на характерные размеры изменения параметров (вдоль поля примем его равным L_s , поперек — Δ). В стационарном состоянии

$$[(V_{\parallel}^z)^2 - V_I^2]/L_s = (V_s - V_{\parallel}^z)/\tau_z + D_{\perp} V_{\parallel}^z/\Delta^2,$$

откуда

$$V_{\parallel}^z \approx \sqrt{V_s^2 \left[\alpha_{\tau} + \left(\frac{\alpha_{\tau} - \alpha_{\perp}}{2} \right)^2 \right]} + V_I^2 - V_s \frac{|\alpha_{\tau} - \alpha_{\perp}|}{2}, \quad (5.24)$$

где
$$\alpha_{\tau} = \frac{L_s}{V_s \tau_z} \approx \frac{L_s}{\lambda_c} \frac{z^2 m_i}{m_I}; \quad \alpha_{\perp} = \frac{D_{\perp} L_s}{\Delta^2 V_s}.$$

При $\alpha_{\tau} < \alpha_{\perp}$, $\alpha_{\perp} > \sqrt{m_i/m_I}$, $V_{\parallel}^z = V_I^2/(V_s \alpha_{\tau})$. В этом случае SOL не эффективен, так как за время поперечной диффузии примесь не успевает выйти на материальную поверхность вдоль силовых линий. Если $\alpha_{\perp} < \alpha_{\tau}$, то диффузионный перенос продольного импульса несуществен. В такой ситуации при $\alpha_{\tau} \ll m_i/m_I$ примесь движется вдоль поля с тепловой скоростью V_I ; при $m_i/m_I \ll \alpha_{\tau} \leq 1$ примесные ионы в той или иной степени увлечены течением фоновой плазмы; если же $\alpha_{\tau} \geq 1$, то $V_{\parallel}^z \simeq V_s$. Для типичных параметров SOL $n \geq 3 \cdot 10^{12}$ см⁻³, $T \leq 20$ эВ — и железа в качестве примеси $\alpha_{\tau} > 1$ при $z \geq 3$, так что основная масса примеси увлекается движением водородных ионов. В таком случае уравнение непрерывности для заряженной примеси в SOL имеет вид [89]

$$\frac{d}{dx} \left(-D_{\perp} \frac{dn_I}{dx} \right) + \frac{n_I V_s}{L_s} = k_i^0 n n_I^0, \quad (5.25)$$

где принято $\partial/\partial l \simeq 1/L_s$.

Длина пробега нейтралов до ионизации мала по сравнению с L_s и профиль n^0_I описывается (5.7) с учетом того, что стенка находится при $x = x_w$.

В качестве граничных условий примем условия обращения плотности ионов примеси и их потока в нуль соответственно на стенке и при $x = x_0$. Последнее условие дает равенство потоков

ионов и атомов примеси во всей периферийной области, где $V_{\parallel} = 0$. Следовательно, вместо него можно принять условие на сепаратрисе или магнитной поверхности, касающейся лимитера

$$(-D_{\perp} dn_I/dx + n_I^0 v_I)|_{x=0} = 0.$$

При $D_{\perp}(x) = \text{const} = D_s$ решение (5.25) имеет вид:

$$n_I = \frac{j_I}{D_s} \left[\int_{x_w}^x \text{ch} \left(\frac{x-x'}{\delta} \right) \exp \left(- \int_{x_w}^{x'} \frac{nk_i^0}{v_I} dx'' \right) dx' + \frac{\text{sh}[(x-x_w)/\delta]}{\text{ch}(x_w/\delta)} \int_{x_w}^0 \text{sh} \left(\frac{x}{\delta} \right) \exp \left(- \int_{x_w}^x \frac{nk_i^0}{v_I} dx' \right) dx \right], \quad (5.26)$$

где $\delta = \sqrt{D_s L_s / V_s}$. Из (5.26) находим поток ионов примеси на стенку $\Gamma_{\perp}'|_{x=x_w} = j_I(1 - \eta_s)$, где коэффициент

$$\eta_s = \frac{1}{\delta} \int_{x_w}^0 \frac{\text{sh}(x/\delta)}{\text{sh}(x_w/\delta)} \exp \left(- \int_{x_w}^x \frac{nk_i^0}{v_I} dx' \right) dx$$

характеризует эффективность SOL с точки зрения ионизации атомов примеси.

Таким образом, в рассматриваемом случае вместо (5.10) имеем

$$j_I = \Gamma_{sp} S_i / [1 - S_s(1 - \eta_s)], \quad (5.27)$$

где Γ_{sp} — поток плазмы на стенку в конфигурации с SOL.

Для Γ_{sp} и профиля плотности плазмы в SOL воспользуемся результатами § 4.2.

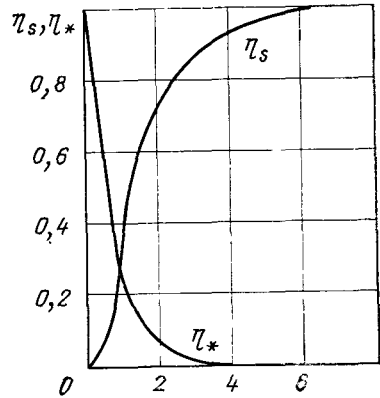
Экранирующие свойства SOL для примесей, поступающих со стенки, количественно характеризуются коэффициентом η_* , который равен отношению потока атомов примеси в периферийной области ($x \geq 0$) при наличии SOL и без него:

$$\eta_* = \frac{1 - S_s}{1 - S_s(1 - \eta_s)} \frac{\exp \left(- \int_{x_w}^0 \left(\frac{nk_i^0}{v_I} \right) dx \right)}{\text{ch}(x_w/\delta)}. \quad (5.28)$$

Рисунок 42 демонстрирует зависимость коэффициентов η_s и η_* от глубины SOL. При расчете принималось: $D_{\perp} = 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_p = 20 \text{ эВ}$, $\delta = 1 \text{ см}$, заряд примесей, распыляющих стенку, соответствует корональному равновесию.

Экранировка примесей, поступающих с лимитера. Если Δ достаточно велико, основным источником примеси является распыление лимитера или диверторных пластин. Вопрос об эк-

Рис. 42. Зависимости коэффициентов η_s и η_* , характеризующих эффективность экранировки разряда от примесей, поступающих с первой стенки, от отношения Δ/δ



ранирующих свойствах SOL для примесей, поступающих с лимитера, теоретически рассматривался в [88, 90] для случая, когда материальная и магнитные поверхности перпендикулярны друг другу. Для профилей параметров фоновой плазмы в SOL принималось приближение «ступеньки»:

$$n(x, l) = \hat{n}(l); T(x, l) = \hat{T}(l); -\delta \leq x \leq 0; n = T = 0; x \leq -\delta.$$

Поведение распыленных атомов примеси в плазме SOL описывается двумерным кинетическим уравнением для функции распределения по скоростям $f_I^0(v_x, v_\xi; x, \xi)$:

$$v_x \partial f_I^0 / \partial x + v_\xi \partial f_I^0 / \partial \xi = -k_0^i n f_I^0, \quad (5.29)$$

где $\partial \xi = -\sin \psi \cdot dl$.

Общее решение (5.29) имеет вид:

$$f_I^0(v_x, v_\xi; x, \xi) = f_I^0(v_x, v_\xi; x_L, 0) \exp \left[(-1/v_\xi) \int_0^\xi k_i^0 n d\tau \right],$$

где $-\delta \leq x_L \leq 0$ — координаты источника атомов на лимитере; функция распределения атомов на лимитере принимается в модельной форме:

$$f_I^0(v_x, v_\xi; x_L, 0) = \begin{cases} \frac{j_I}{2v_I} \delta(v_\xi - v_I) [\delta(v_x - v_I) + \delta(v_x + v_I)], & -\delta \leq x_L \leq 0, \\ 0, & x_L < -\delta, x_L > 0. \end{cases}$$

Параметры плазмы меняются слабо вдоль магнитного поля на глубине проникновения атомов примеси, которая определяется как $l^0_I = \min(\delta, l_I)$. Действительно, если рециклинг на лимитере слабый, то характерные размеры изменения n и T порядка $L_s \gg \delta$. В случае сильного рециклинга плотность и температура фоновой плазмы меняются существенно на расстояниях от лимитера порядка $l_* \gg l_I$. Плотность атомов примеси, усредненная по ширине SOL, дается выражением

$$n_I^0(\xi) = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^0 dx \int_0^\infty dv_\xi \int_{-\infty}^\infty dv_x f_I^0 = \frac{j_I}{v_I} \exp \left(-\frac{k_{i0} n_P \xi}{v_I} \right) \left(1 - \frac{\xi}{\delta} \right). \quad (5.30)$$

Для потока атомов примеси из SOL в основную плазму имеем

$$J_I^0 = L_0 \int_{-\delta}^0 \frac{j_I}{2} \exp(-k_i^0 n_p \xi / v_I) d\xi = L_0 \frac{j_I v_I}{2k_i^0 n_p} \left[1 - \exp\left(-\frac{k_i^0 n_p \delta}{v_I}\right) \right]. \quad (5.31)$$

При описании движения ионов примеси в SOL вдоль магнитного поля в [88] была использована модель пробных частиц. В системе отсчета, связанной со сгустком таких частиц, ионы диффундируют поперек магнитных поверхностей. Связанное с диффузией изменение плотности частиц в сгустке описывается уравнением

$$\frac{Ddn_I}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-D_{\perp} \frac{\partial}{\partial x} dn_I \right) = 0. \quad (5.32)$$

Граничные условия (5.32) определяются характером движения заряженных частиц вне SOL. В [88] рассмотрен случай, когда вне плазмы ($x < -\delta$) диффузия примеси отсутствует ($D_{\perp} = 0$), а в основном объеме токамака ($x > 0$) коэффициент диффузии такой же, как в SOL. Кроме того, рассмотрение было ограничено стадией накопления примеси, когда ее плотность в центре разряда далека от стационарной. В этом случае

$$\frac{\partial dn_I}{\partial x} \Big|_{x=-\delta} = 0; \quad dn_I \Big|_{x \gg \delta} = 0.$$

Ионы, возникающие при ионизации атомов в точке (x_0, l_0) , появляются в точке наблюдения (x, l) через интервал времени Δt , который связан с l, l_0, v_I уравнением движения (5.23). Плотность таких ионов находится через функцию Грина уравнения (5.32):

$$dn_I(x, l) = d\lambda_0 d l_0 dv_I \frac{k_i^0 n(l_0)}{dl/dt} \int j_I^0(v_x, v_{\xi}; x_0, \xi_0) dv_x \frac{1}{2V \pi D_{\perp} \Delta t} \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D_{\perp} \Delta t} \right] + \exp \left[-\frac{(x+x_0)^2}{4D_{\perp} \Delta t} \right] \right\}, \quad (5.33)$$

где $v_I = -\sin \psi \cdot v_{\xi}$; $l_0 = L_s - \xi_0 / \sin \psi$.

В (5.33) должны учитываться как частицы, идущие от лимитера ($dl/dt < 0$), так и двигающиеся к нему ($dl/dt > 0$), изменившие первоначальный знак скорости под действием электрического поля, столкновений с частицами фоновой плазмы. Полная плотность ионов примеси $n^+(x, l)$ определяется при интегрировании (5.33) по x_0, l_0, v_I . Воспользуемся тем, что для современных и будущих токамаков $\delta > l_I$, так что

$$j_I^0 \approx \int_{-\delta}^0 j_I dx / \delta.$$

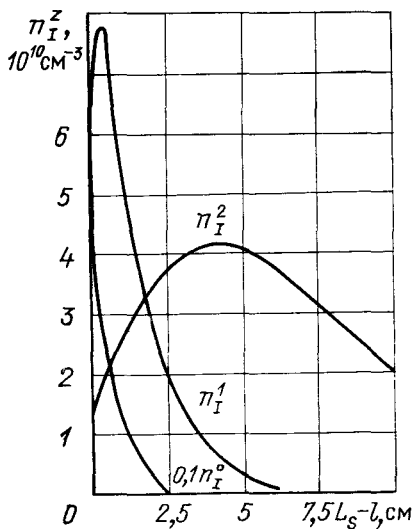


Рис. 43. Профили плотности атомов и ионов железа, рассчитанные с учетом их движения поперек магнитных поверхностей

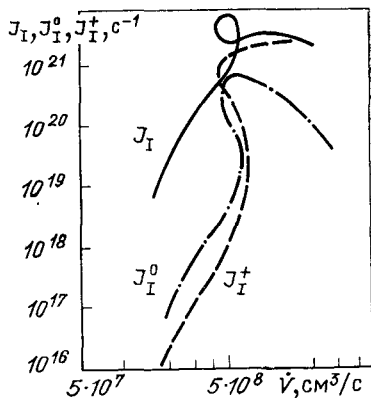


Рис. 44. Зависимость потоков примеси в реакторе-токамаке с открытым откатным лимитером от скорости откачки:

J_I — поток атомов молибдена, распыляемых с нейтрализационной поверхности; J_I^{0+} — потоки атомов и ионов из SOL

В результате для средней по ширине SOL плотности получаем:

$$n_I^+ = \frac{j_I k_I^0 n_P}{2v_I} \int_0^{\delta} d\xi_0 \exp\left(-\frac{k_I^0 n_P \xi_0}{v_I}\right) \left(1 - \frac{\xi_0}{\delta}\right) \left(\frac{dl}{dt}\right)^{-1} \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{-\delta - x}{2\sqrt{D_{\perp} \Delta t}}\right) + 2\operatorname{erf}\left(\frac{-x}{2\sqrt{D_{\perp} \Delta t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\delta - x}{2\sqrt{D_{\perp} \Delta t}}\right) \right].$$

Для определения плотности ионов конкретной кратности ионизации интегрирование должно проводиться по соответствующей области изменения l_0 , v_l . Аналитическое определение этих областей довольно громоздко, однако при численном интегрировании принадлежность dn_I какой-либо из них непосредственно определяется зарядом z данного сгустка ионов. На рис. 43 представлены профили вдоль магнитного поля усредненных поперек SOL плотностей атомов, одно- и двухзарядных ионов железа, рассчитанные для тех же параметров фоновой плазмы, что были приняты в [86], при $D_{\perp} = 1 \text{ м}^2/\text{с}$. Сравнение рис. 41 и 43 показывает, что поперечный перенос примеси существенно меняет распределение ее плотности в SOL.

Для потока заряженной примеси, поступающей в рабочий объем токамака, в [88] получено:

$$J_I^+ = L_0 \int_0^\infty d\xi \left[-D_\perp \frac{\partial n_I^+(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] = L_0 \frac{j_I k_i^0 n_p \delta}{v_I} \int_0^\delta d\xi_0 \times \\ \times \exp(-k_i^0 n_p \xi_0 / v_I) \left(1 - \frac{\xi_0}{\delta} \right) \left[1 - \operatorname{erf}(y_0) + \frac{1 - \exp(-y_0^2)}{\sqrt{\pi}} \right], \quad (5.34)$$

где $y_0 = \delta / \sqrt{D_\perp \tau(\xi_0)}$; $\tau(\xi_0)$ — время, за которое ион, возникший в точке $\xi = \xi_0$, приходит в плоскость $\xi = 0$.

На основе формул (5.31), (5.34) в [90] были проведены расчеты зависимости интегральных потоков: распыленных атомов с нейтрализационной поверхности $J_I = L_0 \delta j_I$, атомов и ионов из SOL в рабочий объем (J_I^0, J_I^+ соответственно) реактора-токамака масштаба INTOR в конфигурации с открытым откачным лимитером. При расчетах учитывалось самораспыление молибденового лимитера ионами, которые не выходят из SOL, и ионами, поступающими в SOL из рабочего объема. Заряд последних принимался равным среднему заряду при корональном равновесии с $T = T_p$. На рис. 44 представлена зависимость потоков $J_I, J_I^{0,+}$ от скорости откачки. При переходе основной плазмы в состояние сильного рециклинга на нейтрализационной поверхности при $\dot{V} \leq 5 \cdot 10^8$ см³/с потоки примесей с лимитера и в рабочий объем падают на несколько порядков.

В стационарном состоянии с сильным рециклингом поток примеси из SOL в виде ионов с малым z компенсируется обратным потоком сильноионизованных частиц. Установившийся уровень плотности последних в рабочем объеме можно оценить сверху как

$$n_\perp^c \approx (J_I^+ + J_I^0) / (S_0 D_\perp^c),$$

где D_\perp^c — коэффициент диффузии в центральных областях разряда.

Полагая $D_\perp^c = 0,5$ м²/с, находим, что в режимах с сильным рециклингом $n_\perp^c \leq 10^{10}$ см⁻³, т. е. существенно ниже уровня, опасного для термоядерного горения.

В [91] влияние поперечного переноса примесей в SOL рассматривалось на основе кинетического подхода к описанию движения ионов вдоль силовых линий. Полученные там результаты близки к результатам [88, 90].

В заключение отметим, что в последнее время разработаны численные коды для двумерного моделирования поведения примесей в SOL методами Монте-Карло [92, 93]. Они позволяют учесть все многообразие процессов, происходящих с атомами и

ионами примеси, повысить точность описания до уровня, необходимого для проведения инженерных расчетов реакторных установок.

5.5. Вывод гелия из реактора-токамака

Необходимым требованием к способу организации процессов в пристеночной области реактора-токамака является обеспечение вывода из рабочего объема гелиевой золы при достаточно низком уровне ее концентрации, который не должен превышать 5% [34]. В [32, 70, 92, 139] показано, что эта задача может быть решена как при создании конфигурации с турбулентным плазменным бланкетом, так и при реализации режима с сильным рециклингом плазмы на нейтрализационных пластинах дивертора или откачного лимитера.

Турбулентный плазменный бланкет (ТПБ) [32]. В конфигурации с ТПБ откачка гелия может быть организована так же, как и вывод несгоревшего топлива — в виде атомов, которые попадают в специальные отверстия в первой стенке. Поток таких атомов к стенке формируется в результате упругих столкновений и перезарядки атомов гелия, рециклирующих со стенки, на ионах водорода и гелия.

Для описания атомов в [32] было использовано кинетическое уравнение для функции распределения по скоростям в τ -приближении:

$$v_x \frac{\partial f_{\text{He}}}{\partial x} = -k_i^{\text{He}} n f_{\text{He}} - k_c^{\text{He}} (n_\alpha f_{\text{He}} - n_{\text{He}} f_\alpha) - \frac{f_{\text{He}} - f_{\text{He}}^0}{\tau_{\text{He}}}, \quad (5.35)$$

где $k_{i,c}^{\text{He}}$ — константы ионизации и перезарядки атомов гелия; f_α , n_α — функция распределения и плотность гелиевых ионов; $\tau_{\text{He}}^{-1} = k_e^{\text{H}} n + k_e^{\text{He}} n_\alpha$, $k_e^{\text{H,He}}$ — константы упругих столкновений с ионами водорода и гелия соответственно; учтено, что константы перезарядки и упругих столкновений атомов гелия с одно- и двухзарядными ионами близки [19].

Равновесная функция распределения f_{He}^0 и f_α принимаются в виде

$$f_{\text{He}}^0, f_\alpha = \frac{n_{\text{He},\alpha}}{2} [\delta(v_x - v_\alpha) + \delta(v_x + v_\alpha)],$$

где $v_\alpha = \sqrt{2T/m_\alpha}$.

Граничные условия (5.35) учитывают поступление со стенки в плазму двух групп атомов гелия: десорбирующих с температурой стенки ($k=1$) и отраженных с энергией, близкой к

T_p ($k=2$). Решая (5.35) методом, использованным в § 2.2 при решении кинетического уравнения для нейтралов водорода, получаем следующие соотношения для плотности и потока атомов гелия:

$$n_{\text{He}} = \frac{\Gamma_{\text{He}}}{v_{\alpha}} \sum_k \frac{\gamma_k (\eta_k^2 - 1) \eta_k}{\eta_k^2 - \beta_{\alpha}} \left[\frac{1 - \sqrt{\beta_{\alpha}}}{\eta_k} \exp(-u_{\alpha}) + \exp(-\alpha_k u_{\alpha}) \right]; \quad (5.36)$$

$$j_{\text{He}} = \Gamma_{\text{He}} \beta_{\alpha} \sum_k \frac{\gamma_k (\eta_k + 1) \eta_k}{\eta_k^2 - \beta_{\alpha}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{\alpha}}} - 1 \right) \exp(-u_{\alpha}) + \left(1 - \frac{1}{\eta_k} \right) \exp(-\alpha_k u_{\alpha}) \right]; \quad (5.37)$$

здесь $\eta_k = v_{\alpha} / \omega_k$; $\beta_{\alpha} = k_i^{\text{He}} / k_{\alpha}$, где $k_{\alpha} = k_i^{\text{He}} + k_e^{\text{H}} + (k_e^{\text{He}} + k_c^{\text{He}}) n_{\alpha} / n$;

$u_{\alpha} = (\sqrt{\beta_{\alpha}} k_{\alpha} / v_{\alpha}) \int_0^x n d\lambda$; $\alpha_k = \eta_k / \sqrt{\beta_{\alpha}}$; Γ_{He} , ω_k — суммарный поток и

скорости первичных атомов гелия.

Перенос гелиевых ионов описывается уравнением (5.6). Пренебрегая неоклассическим потоком, интегрируем сумму уравнений переноса. В результате получаем выражение для плотности α -частиц на границе пристеночной области n_{α}^w . В случае сильного рециклинга на стенке ($\Gamma_{\alpha 0} \ll \Gamma_{\text{He}}$, где $\Gamma_{\alpha 0}$ — поток из зоны термоядерного горения) имеем:

$$n_{\alpha}^w = \int_0^{\infty} \frac{j_{\text{He}}}{D_{\perp}} dx + n_{\alpha} |_{x=0}. \quad (5.38)$$

Поток атомов гелия на стенку

$$\Gamma_{\text{He}}^w = (1 - \sqrt{\beta_{\alpha}}) \sum_k \frac{\gamma_k \eta_k}{\eta_k + \sqrt{\beta_{\alpha}}} \Gamma_{\text{He}}. \quad (5.39)$$

Если стационарное состояние поддерживается откачкой атомов, попадающих в отверстия в стенке, то имеем связь между

Γ_{He}^w и $\Gamma_{\alpha 0}^{\alpha}$ (см. § 2.5):

$$\Gamma_{\text{He}}^w / \Gamma_{\alpha 0}^{\alpha} = F_{0j} F_1 + F_{0j} \omega_1 / (4\dot{V}). \quad (5.40)$$

Соотношения (5.38) — (5.40) позволяют найти концентрацию α -частиц на границе пристеночной области $\xi_{\alpha}^w = n_{\alpha}^w / n_0$. Приближенное аналитическое выражение для ξ_{α}^w получается в предположении, что со стенки поступают только атомы водорода и гелия с температурой пристеночной плазмы. В этом случае u_{α} выражается как функция x с помощью (2.20) и интеграл в

(5.38) оценивается методом перевала, учитывая, что

$\Gamma_{\text{He}}^w/\Gamma_0^\alpha \approx \Gamma_w/\Gamma_0$ при $n_\alpha^w \gg n_\alpha|_{x=0}$ находим:

$$\xi_\alpha^w \approx 0,4 \frac{k_H - \sqrt{k_H k_i^\alpha}}{k_\alpha - \sqrt{k_\alpha k_i^{\text{He}}}} \frac{\Gamma_0^\alpha}{\Gamma_0}, \quad (5.41)$$

где $k_H = k^{\alpha_i} + k_c$.

Если в центре разряда поперечный перенос фоновой плазмы и α -частиц одинаков, среднюю концентрацию последних можно связать с ξ_α^w следующим образом:

$$\bar{\xi}_\alpha = \xi_\alpha^w (n_0/\bar{n}) + (\Gamma_\alpha/\Gamma_0) (1 - n_0/\bar{n}).$$

Константу упругих столкновений атомов гелия с ионами оценивают исходя из того, что взаимодействие описывается потенциалом Борна — Майера [18]. Данные о константах перезарядки и ионизации He взяты из [19]. При $T_p \approx 15$ эВ $k_e^{\text{He}} \approx \approx k_e^{\text{He}_i} \approx 2 \cdot 10^{-9}$ см³·с⁻¹. При $\bar{n}/n_0 = 1,4$, $\Gamma_\alpha/\Gamma_0 = 10^{-2}$ это дает $\xi_\alpha^w = 4\%$, $\bar{\xi}_\alpha = 3\%$. Следовательно, ТПБ позволит в принципе решить проблему поддержания достаточно низкого уровня концентрации гелия в термоядерном реакторе.

Конфигурация с SOL. Вопрос о выводе гелия из реактора в конфигурации с SOL рассматривался в [70, 92, 139] на основе описания движения ионов гелия вдоль магнитного поля в приближении пробной жидкости. В режиме с сильным рециклингом плазмы на нейтрализационных пластинах термосила препятствует выходу α -частиц, имеющих большие по сравнению с фоновыми ионами массу и заряд, в диверторный объем. В основной части SOL их плотность согласно § 5.3 меняется пропорционально $T_\alpha^{\beta_\alpha}$. При вычислении β_α учтем зависимость β_α от M_I , а также члены в (5.13), имеющие порядок ниже z^2 ; находим, что $\beta_\alpha \approx 3,6$.

Расчеты, проведенные в [70], показали, что несмотря на влияние термосила относительная концентрация α -частиц в SOL реактора-токамака ξ_α^s не должна превышать 3—4%. Этот результат может быть понят из следующих соображений. Согласно § 3.4, $\xi_\alpha^s \approx \xi_\alpha^r (\langle T \rangle / T_*)^{\beta_\alpha}$, где ξ_α^r — концентрация в области рециклинга, T_* — температура, при которой сравниваются сила трения об основные ионы и термосила. ξ_α^r может быть оценена из баланса частиц. С учетом того, что в систему откачки попадают нейтралы, возникающие при рекомбинации заряженных частиц на расстоянии от границы слоя плазмы не более длины пробега до ионизации,

$$\xi_\alpha^r = \frac{J_\alpha^*}{J^*} \frac{k_i^{\text{He}}}{k_i^\alpha} \approx \xi_{\text{He}} \exp\left(\frac{I_H - I_{\text{He}}}{T_p}\right),$$

где J^* , J^*_α — потоки нейтралов в патрубках откачки, концентрация атомов гелия в системе откачки. Так как $T_p \ll T_{He}$, $\xi^r_\alpha \ll \xi_{He}$.

Результаты, полученные в [70], согласуются с данными расчетов, которые в [92] проводились на основе двумерного моделирования гелия в SOL методом Монте-Карло: в [92] найдено, что на сепаратрисе реактора-токамака $\xi^s_\alpha = 0,05$.

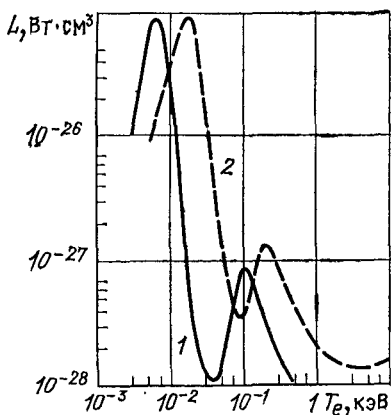
В заключение отметим результаты [94], где показано, что в режиме работы реактора с автоколебаниями плазмы в SOL уровень ξ^s_α может быть существенно ниже.

5.6. Роль примесей в тепловом балансе периферийной плазмы

Как уже отмечалось, излучение сильноионизованных средних и тяжелых примесей, таких как Fe и Mo, может вносить существенный вклад в энергетический баланс центральной части разряда. Легкие примеси (O, C) сильнее влияют на периферийную плазму, поскольку в ней присутствуют ионы с малыми z , имеющие богатые спектры линейчатого излучения. Удельные потери энергии из электронного компонента, связанные с возбуждением таких ионов, примерно в 10^3 раз превышают потери на тормозное излучение на полностью ионизованных примесях из центральных областей разряда [82].

Охлаждающая неустойчивость на примесях. В [95] рассмотрена устойчивость теплового баланса периферийной плазмы, содержащей легкие примеси, в предположении, что распределение ионов примеси по состояниям с разным зарядом описывается корональным равновесием. В этом случае для удельной мощности радиационных потерь, фигурирующей в уравнении теплового баланса (1.3), справедливо соотношение

$$Q_I = nn_I L(T_e). \quad (5.42)$$



Зависимости $L(T_e)$ для углерода и кислорода представлены на рис. 45. Из них следует, что при достаточно низких T_e равновесное состояние периферийной плазмы может быть неустойчиво: флюктуационное уменьшение T_e должно приводить к увеличению радиационных потерь энергии и, если

Рис. 45. Зависимость излучательной способности ионов углерода (1) и кислорода (2) от температуры электронов в корональном равновесии

они не компенсируются подводом тепла из более горячих областей разряда, к дальнейшему падению температуры.

Рассмотрим малые стационарные возмущения температуры плазмы \tilde{T} в ситуации, когда исходное и возмущенное состояния однородны вдоль магнитного поля. Если радиационное излучение примесей является основным каналом объемных потерь энергии, линеаризованное по отношению к таким возмущениям уравнение теплового баланса имеет вид

$$\frac{d}{dx} \kappa_{\perp} F \frac{d\tilde{T}}{dx} - \tilde{T} F \left[nn_I L' - 5 \frac{d\Gamma_{\perp}}{dx} \right] = 0, \quad (5.43)$$

где принято $L' = dL/dT$; $F = \exp\left(-\int_0^x 5\Gamma_{\perp} d\lambda / \kappa_{\perp}\right)$.

Граничное условие для уравнения (5.43) при $x=0$ находим, линеаризуя (1.8):

$$\left. \frac{d\tilde{T}}{dx} \right|_{x=\infty} = \frac{\tilde{T}}{a_0}; \quad a_0 = \frac{\kappa_{\perp}}{(\gamma_0 - 5)\Gamma_p};$$

из условия сохранения потока тепла из центра разряда следует

$$\left. \frac{d\tilde{T}}{dx} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0.$$

Для вывода критерия устойчивости невозмущенного состояния в [95] был использован вариационный метод, согласно которому устойчивость имеет место, если функционал

$$W(\tilde{T}) = \int_0^{\infty} F \left[\kappa_{\perp} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right)^2 + \left(nn_I L' + 5 \frac{d\Gamma_{\perp}}{dx} \right) \tilde{T}^2 \right] dx - F \tilde{T} \left. \frac{d\tilde{T}}{dx} \right|_{x=0}^{x=\infty}$$

положителен при любых \tilde{T} , удовлетворяющих граничным условиям.

Функция $L'(T)$ принимает большие отрицательные значения в узком интервале температур ΔT вблизи $T = T_b$. Например, в случае кислорода $\Delta T \approx 10$ эВ, $T_b \approx 30$ эВ. Поэтому в [95] для $L'(T)$ была принята аппроксимация вида $L' = -|L'|_{\max}$; $T_b < T < T_b + \Delta T$; $L' = 0$; $T < T_b$; $T > T_b + \Delta T$.

В пренебрежении конвективным теплопереносом при $\kappa_{\perp} = \text{const}$ критерий устойчивости имеет вид:

$$n_b n_I < \kappa_{\perp} / (|L'|_{\max} x_b \Delta x_b),$$

где x_b — координата точки, в которой $T = T_b$; Δx_b — ширина области с $L' = -|L'|_{\max}$; $n_b = n(x_b)$; $\Delta x_b \ll x_b$.

Если, следуя [95], считать, что на периферии разряда градиент температуры меняется слабо, так что $\Delta T_b / \Delta x_b \approx T_b / x_b$, и

учесть что, $|L'|_{\max} \Delta T_b \approx L_{\max}$, то критерий устойчивости можно записать следующим образом:

$$n_b < \frac{q_0}{\sqrt{\xi_I L_{\max} T_b^{\kappa_{\perp}}}} = n_b^m, \quad (5.44)$$

где $\xi_I = n_I/n$.

Влияние конвективного теплопереноса в периферийной области на критерий устойчивости рассмотрено в [96], где вместо (5.44) получено

$$n_b < n_b^m f(\xi_b). \quad (5.45)$$

Здесь $\xi_b = x_b n_0 \sigma_*/2$, а функция f имеет весьма громоздкий вид, причем $f \rightarrow 0$ при $\xi_b \rightarrow 0$ и $f \approx 1$ при $\xi_b \geq 1$.

Соотношениями (5.44), (5.45) определяется максимальная допустимая плотность при x_b , при превышении которой развивается охлаждательная неустойчивость на примесях.

Баланс тепла периферийной области. Принятые в [95, 96] зависимости $L(T)$ и профиль температуры в периферийной плазме являются достаточно грубыми. Действительно, так как температура возрастает к центру разряда, условия развития охлаждающей неустойчивости прежде всего выполняются в периферийной области, где T меняется слабо с x и L практически постоянно. С учетом излучения примесей условие баланса энергии в области имеет вид:

$$q_0 = \bar{Q}_I x_0 + \gamma_0 \Gamma_P T_P, \quad (5.46)$$

где $\bar{Q}_I = \xi_I L(T_P) n_0^2 / 4$, последний член в правой части — поток тепла, передаваемый материальным поверхностям (считается, что на лимитере плазма не находится в состоянии сильного рециклинга).

Примем, что в периферийной области $D_{\perp} = A_D/n$. В этом случае $\Gamma_P \approx A_D n_0 \sigma_*$ и (5.46) переписывается в виде

$$F(T_P) \equiv \xi_I L(T_P) / (2\sigma_*) + \gamma_0 A_D \sigma_* T_P = q_0 / n_0 \equiv p. \quad (5.47)$$

Вблизи $T = T_b$ зависимость $L(T)$ достаточно точно аппроксимируется выражениями

$$L = \exp(-2,64 \ln^2 T + 9,44 \ln T - 23)$$

в случае углерода и

$$L = \exp(-1,71 \ln^2 T + 9,94 \ln T - 28,8)$$

в случае кислорода, где T выражено в эВ, L — в эВ·см³·с⁻¹.

Зависимости F от T_P (рис. 46) (при расчете принималось $\gamma_0 = 7,5$; $\xi_I = 1\%$, $A_D = 10^{17}$ см⁻¹·с⁻¹) позволяют проанализировать эволюцию периферийной плазмы при изменении параметра p . Если первоначально плотность в разряде достаточно низка, так что p превышает значение, соответствующее максимуму F , то с ростом n_0 и уменьшением p температура в пери-

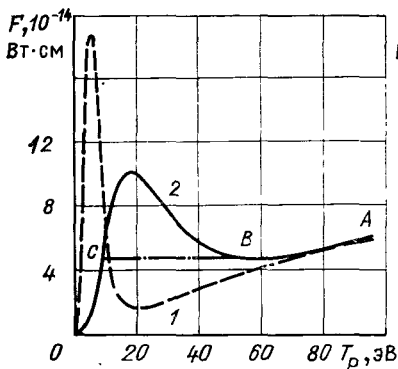


Рис. 46. Зависимость $F(T_p)$ при 1%-ном содержании углерода (1) и кислорода (2)

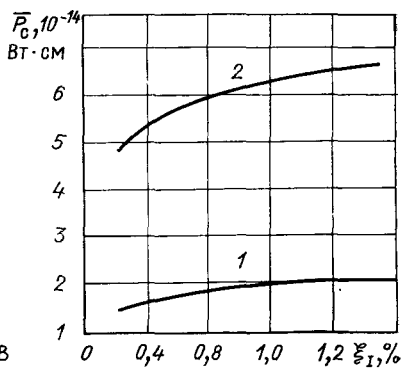


Рис. 47. Зависимость критического значения параметра \bar{p}_c от концентрации углерода (1) и кислорода (2)

ферийной области меняется вдоль участка AB кривой $F(T_p)$. При достижении p критического значения p_c , равного значению $F(T_p)$ в минимуме, разряд скачком через развитие охлаждающей неустойчивости переходит в состояние C , в котором тепловой баланс периферийной плазмы определяется в основном излучением примесей.

Потери тепла и частиц из плазмы токамака носят, как известно, асимметричный характер — они более интенсивны на внешнем обводе тора, чем на внутреннем. Учтем это, приняв $q_0 = \bar{q}_0 f(\theta)$, $A_D = \bar{A}_D f(\theta)$, где \bar{q}_0 , \bar{A}_D — значения q_0 , A_D , усредненные по полоидальному углу θ , f убывает с ростом θ . В таком случае вместо (5.47) имеем

$$F(T_p, \theta) \equiv \frac{L(T_p) \xi_I}{2\sigma_* f(\theta)} + \gamma_0 \bar{A}_D \sigma_* T_p = \frac{\bar{q}_0}{n_0} \equiv \bar{p}. \quad (5.47a)$$

Анализ показывает, что при уменьшении f значение \bar{p} в минимуме возрастает. Следовательно, при уменьшении \bar{p} условия перехода в состояние с излучением прежде всего выполняются на внутреннем обводе, где f минимально.

Изменение f в (5.47a) можно рассматривать как изменение концентрации примеси и, естественно, чем больше ξ_I , тем при бóльших \bar{p} начинается развитие охлаждающей неустойчивости. Однако учет реальной нелинейной зависимости $L(T)$ в (5.47) дает существенно более слабую зависимость критического значения \bar{p} от ξ_I , чем это следует из (5.44). На рис. 47 показана зависимость \bar{p}_c от ξ_I , найденная из условия минимума $F(T_p, \theta)$ для $f=0,2$, что является типичным значением f на внутреннем обводе [37]. Изменение ξ_I на порядок приводит к изменению \bar{p}_c в 1,35 раза.

Возмущения, неоднородные вдоль магнитного поля [97—99].

При их рассмотрении необходимо учитывать изменения плотности, так как в области с отрицательным возмущением температуры давление плазмы падает и возникает течение вдоль силовых линий, которое приводит к росту плотности. Поскольку Q_I зависит от n , этот фактор является дестабилизирующим. Из-за перепада температуры плазмы вдоль поля возникает дополнительный тепловой поток в область возмущения, который его стабилизирует.

В [99] уравнения (1.1)—(1.3), в которых из переносов поперек магнитного поля учитывалась только теплопроводность, были линеаризованы по отношению к возмущениям вида \tilde{n} , \tilde{T} , $\tilde{V}_{\parallel} \sim \cos(h_{\parallel} l) \cos(h_{\perp} \lambda) \exp(\gamma t)$. В результате получено следующее дисперсионное соотношение:

$$\gamma^3 + \gamma^2 * [(\omega_0 \tau_H)^{-1} + \nu(\omega_0 \tau_r)^{-1}] + (5/3) \gamma * + (\omega_0 \tau_H)^{-1} - (\mu_Q - \nu_Q) (\omega_0 \tau_r)^{-1} = 0, \quad (5.48)$$

где $\gamma_* = \gamma/\omega_0$, $\omega_0^2 = 2Th_{\parallel}^2/m_i$; $\tau_r = 3nT/Q_I$; $\tau_H^{-1} = \tau_{H\parallel}^{-1} + \tau_{H\perp}^{-1}$; $\tau_{H\parallel} = 3n/(\kappa_{\parallel} h_{\parallel}^2)$; $\tau_{H\perp} = 3n/(\kappa_{\perp} h_{\perp}^2)$; $\nu_Q = \partial \ln Q_I / \partial \ln T$; $\mu_Q = \partial \ln Q_I / \partial \ln n$.

Если возмущения не приводят к изменению плотности примесей, $\mu_Q = 1$; если примесные ионы движутся вместе с основными, $\xi_I = \text{const}$ и $\mu_Q = 2$.

Из (5.48) следует, что неустойчивость развивается при $\nu_Q < < \mu_Q < \tau_r/\tau_H$, т. е. для достаточно длинноволновых возмущений— даже при положительном ν_Q . Это обусловлено изменением n с ростом возмущения T .

Временная эволюция нелинейных возмущений в [99] рассматривалась на основе численного решения уравнений (1.1)—(1.3), (5.12), (5.13). На рис. 48 представлена зависимость от времени температуры плазмы у материальной поверхности, ограничивающей плазму вдоль магнитного поля. Вначале плазма однородна, содержит углерод с плотностью $3 \cdot 10^{11} \text{ см}^3$. При определении Q_I учитываются отклонения от коронального равновесия. Колебательный характер эволюции обусловлен тем, что из-за падения температуры в области развития возмущения примесь увлекается термосилой в область более горячей плазмы и возмущение растет там из-за увеличения ξ_I .

Картина развития возмущений меняется, если учесть зависимость теплового потока на периферии от полоидального угла. В [99] было принято $q_0 \sim \exp[-(2l/L_i)^2]$, где $l=0$ соответствует внешнему обводу тора, а $l=L_i$ —внутреннему. Профили плотности и температуры, рассчитанные для установки масштаба JET для двух моментов времени, показаны на рис. 49; в данном случае эволюция возмущений носит апериодический

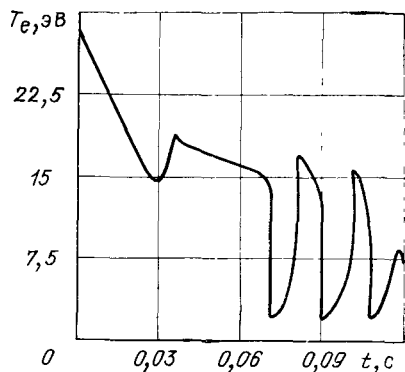


Рис. 48. Изменение температуры плазмы вблизи материальной поверхности во времени при развитии охлаждающей неустойчивости (колебательный режим)

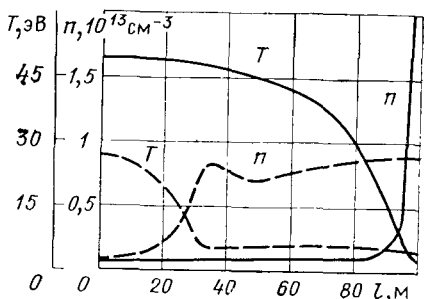


Рис. 49. Развитие охлаждающей неустойчивости при полоидальной асимметрии теплового потока на периферии (апериодический режим):

— профили параметров плазмы вдоль SOL при $t=8$ мс; - - - - при $t=60$ мс

характер, поскольку условия для роста возмущений выполнены только на внутреннем обводе.

Состояния с излучающей периферией и предельная плотность. Если плотность плазмы в разряде достаточно высока и выполнено условие $\bar{p} < \bar{p}_c|_{\theta=0}$, периферийная область должна полностью перейти в состояние, когда излучение примесей доминирует в тепловом балансе плазмы. При этом, однако, соображения, использованные при построении кривых на рис. 46, не применимы потому, что $T_p < T_b$, и в плазме есть область, где $L = L_{\max} > L(T_p)$. При выводе уравнения (5.47) наличие таких областей не учитывалось.

Если малый радиус сильноизлучающей области a_* велик по сравнению с ее толщиной Δ_* , уравнение баланса тепла в области имеет вид:

$$dq_{\perp}/dy = -n^2 \xi_I L(T), \quad (5.49)$$

где $y = r - a_*$; $q_{\perp} = -\kappa_{\perp} dT/dy$; $y = 0$ соответствует границе излучающего слоя с горячей плазмой; $y = \Delta_*$ — границе с холодной периферией, т. е. справедливы неравенства

$$T_+ = T|_{y=0} > T_b; \quad T_- = T|_{y=\Delta_*} < T_l;$$

$$L(T_+, T_-) \ll L_{\max}; \quad q_{\perp}|_{y=\Delta_*} \ll q_{\perp}|_{y=0} = q_0.$$

Умножив уравнение (5.49) на q_{\perp} , проинтегрируем его в пределах $0 \leq y \leq \Delta_*$:

$$q_0^2 = 2n_b^2 \xi_I \kappa_{\perp} g_I, \quad (5.50)$$

где n_b — плотность при $T = T_b$; $q_I = \int_{T_-}^{T_+} L(T) dT$; в случае углерода $g_I \approx 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}^2 \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$, кислорода $g_I \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2 \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

В разряде с чисто омическим нагревом $q_0 = I_p V_L / (4\pi^2 a_* R_0)$, где I_p — ток в плазме; V_L — напряжение на обходе. Из (5.50) находим a_* :

$$a_* = I_p V_L / \left(4\pi^2 R_0 \sqrt{2\xi_I \kappa_{\perp} g_I} \right).$$

В [141] показано, что данное состояние является устойчивым.

С ростом плотности плазмы радиус излучающей области уменьшается, т. е. разряд контрагирует. При этом коэффициент запаса устойчивости на границе излучающего слоя, которая фактически является границей шнура плазмы, меняется как

$$q_* = \frac{5B_0 a_*^2}{R_0 I_p} = \frac{5B_0 I_p V_L^2}{32\pi^4 \xi_I \kappa_{\perp} g_I R_0^3 n_b^2}.$$

С достижением q_* значения, равного 2, начинается развитие крупномасштабных МГД-возмущений, которые, как известно, приводят к срыву разряда. Следовательно,

$$n_b^{\max} = \frac{V_L}{8\pi^2 R_0} \sqrt{\frac{5B_0 I_p}{\kappa_{\perp} \xi_I g_I R_0}} \quad (5.51)$$

можно считать предельной плотностью плазмы на периферии разряда в токамаке.

Роль перезарядки примеси на атомах водорода [100]. При некоторых условиях перезарядка примесей на нейтралах, образующихся на первой стенке, может существенно влиять на распределение примесных ионов по состояниям с разным z . Скорость рекомбинации, обусловленной перезарядкой, равна $n^z_I k^z_c n^w_a$, где k^z_c — константа перезарядки ионов с зарядом z . Далее рассматривается ситуация, когда SOL прозрачен для нейтралов водорода. Подавляющее число нейтралов успевает перезарядиться до ионизации, и их плотность в периферийной области оценивается как $n^w_a \approx \varepsilon^w \Gamma_p / v_i$, где $\varepsilon^w \approx \text{ch}^{-1}(x_w / \delta_n)$ — доля потока плазмы в SOL, достигающая стенки. Для D_{\perp} примем A_D / n и $\Gamma_p \approx A_D n_0 \sigma_*$. В этом случае скорость перезарядки превышает скорость излучательной и диэлектронной рекомбинации с суммарной константой k^z_r , если

$$\varepsilon^w > k^z_r / (\sigma^z_c A_D \sigma_*), \quad (5.52)$$

где $\sigma^z_c = k^z_c / v_i$ — сечение перезарядки, слабо зависящее от T .

При развитии охлаждающей неустойчивости, например на углероде, основную роль играет процесс рекомбинации гелий-

подобных ионов в литийподобные, имеющие богатый спектр линейчатого излучения. Из-за отсутствия переходов без изменения главного квантового числа диэлектронная рекомбинация в данном случае подавлена, а константа излучательной рекомбинации оценивается по формулам [82].

В случае гелийподобных ионов углерода при $T \approx 20$ эВ $k_r \approx \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Следовательно, перезарядка на атомах водорода является основным каналом рекомбинации при $\epsilon^w \geq 0,2$ ($\sigma_c \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$ [101], $A_D = 10^{17} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$).

Если условие (5.52) выполнено, то из процессов рекомбинации в уравнениях баланса (5.5) можно учитывать только перезарядку [100]. В этом случае для концентраций ионов с $z \leq z_c$ имеем

$$\xi_i^z \approx \xi_j \alpha_z \left/ \sum_{z \leq z_c} \alpha_z \right.,$$

где $\alpha_{z_c} = 1$; $\alpha_{z-1} = \alpha_z n_a^w k_c^z / (n k_i^z)$; концентрация ионов с $z > z_c$ мала.

Удельная мощность радиационных потерь энергии

$$Q_I = n^2 \sum_{z_c \geq z} \xi_i^z L_z = n^2 \xi_j \sum_{z_c \geq z} \alpha_z L_z \left/ \sum_{z_c \geq z} \alpha_z \right.,$$

где $L_z = \sum_{i,j} k_{ij}^z E_{ij}^z$; k_{ij}^z — константы возбуждения между состояниями i, j ; E_{ij}^z — энергия перехода.

Скорости радиационных потерь L_z имеют резкие максимумы для литий- и бериллийподобных ионов. В случае углерода [82] $L_1 = 5 \cdot 10^{-10}$, $L_2 = 10^{-8}$, $L_3 = 5 \cdot 10^{-8}$, $L_4 = 10^{-9}$ эВ $\cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

Как следует из § 4.2, при заданных коэффициенте диффузии и геометрических размерах SOL ϵ^w и, следовательно, концентрации ионов примеси с разными z являются функциями только температуры плазмы в периферийной области. Это же относится и к эффективной скорости радиационных потерь энергии:

$$L_* = \sum_{z_c \geq z} \alpha_z L_z \left/ \sum_{z_c \geq z} \alpha_z \right.$$

Температура периферийной плазмы определяется из уравнения (5.47) с заменой L на L_* . Зависимости $F(T_p)$ оказываются близки к изображенным на рис. 46 с некоторым сдвигом максимумов и минимумов в сторону больших T_p .

При рассмотренном механизме рекомбинации переход в состояние, когда излучением примеси определяется баланс тепла в периферийной плазме, полоидально симметричен даже при асимметричном характере потерь тепла и частиц их разряда. Действительно, вблизи состояния В (см. рис. 46) плотность сильноизлучающих литийподобных ионов мала и пропорцио-

нальна n^w_a и, следовательно, Γ_P , т. е. зависит от полоидального угла так же, как A_D . Поэтому все члены в уравнении (5.47) пропорциональны одной и той же функции θ . Это означает, что в данном случае $\bar{\rho}_c$ не зависит от θ .

5.7. Сравнение с экспериментом

При условии прозрачности SOL для нейтралов, рассмотренном в § 2.6, результаты § 5.2 можно использовать для интерпретации экспериментальных данных о содержании примесей в разрядах с лимитерами. Рисунок 50 демонстрирует экспериментальную зависимость концентрации никеля в плазме TFTR от средней плотности в разряде [102] и результаты вычислений ξ_{N1} по формуле (5.11). При расчетах согласно [102] принималось, что помимо дейтерия лимитер распыляется ионами кислорода с $\tilde{z}=4$, $\alpha_l=0,07$. Зависимость температуры пристеночной плазмы от \bar{n} рассчитывали по формулам § 2.3 при типичном значении $\alpha_n=n_0/\bar{n}$, равном 0,75. При $\bar{n}\leq 4\cdot 10^{13}$ см⁻³ имеется хорошее согласие экспериментальных и расчетных данных; расхождение их при больших \bar{n} можно объяснить тем, что SOL становится непрозрачным для атомов примеси.

Развитие MARFE-областей холодной плотной плазмы на внутреннем обводе тора с сильным излучением примесей и нейтралов водорода — в большинстве случаев (см. § 4.5) объясняется охладительной неустойчивостью на примесях. Согласно [72] во многих установках MARFE возникает, когда параметр $\rho=\pi a^2 \bar{n}/I_p$ превышает критическое значение ρ_c , меняющееся в узком интервале численных значений: $\rho_c=(0,4\div 0,7) 10^{12}$ А⁻¹××см⁻¹. Этот факт согласуется с показанной выше слабой зависимостью параметра $\bar{\rho}_c$ от концентрации примесей. В омическом разряде между ρ и $\bar{\rho}$ есть связь:

$$\rho = \frac{\alpha_q}{4\pi\alpha_n} \frac{a}{R_0} \frac{V_L}{p}, \quad (5.53)$$

где α_q — доля мощности, которая выносится на периферию разряда теплопроводностью плазмы.

Входящие в (5.53) параметры близки для различных установок. Принимая их типичные значения ($R_0/a=3,5$; $\alpha_n=\alpha_q=0,75$; $V_L=1$ В) и определяя $\bar{\rho}_c$ из рис. 47, находим, что при изменении содержания кислорода в разряде от 0,2 до 2% ρ_c должно меняться от $0,4\cdot 10^{12}$ до $0,55\cdot 10^{12}$ А⁻¹·см⁻¹.

В установке TEXTOR переход в состояние с сильноизлучающей периферией — detached plasma — полоидально симметричен [103]. Этот факт может быть объяснен особенностями способа поддержания положения равновесия шнура таким образом, чтобы обеспечить одинаковую плотность на внутреннем

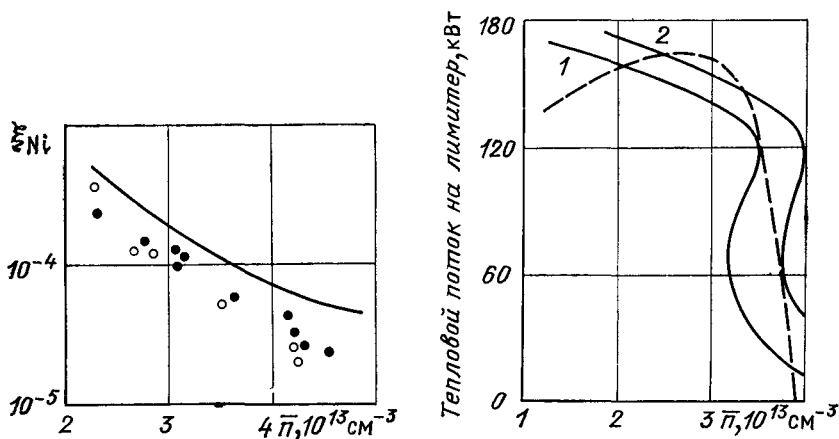


Рис. 50. Зависимость концентрации никеля в TFTR от \bar{n} :

●, ○ — данные измерений [103]; — — результаты вычислений по формуле (5.11)

при $D_{\perp}^W = 1 \text{ м}^2/\text{с}$

Рис. 51. Зависимость теплового потока на лимитер токамака TEXTOR от \bar{n} :

— — — данные измерений; 1 — результаты расчета [100] с учетом перезарядки прнмеси на атомах водорода; 2 — вычисления по (5.46) в предположении полоидально-симметричного характера тепловых потерь и потерь частиц из разряда

и внешнем обводах тора, а также влиянием на развитие охлаждающей неустойчивости атомов водорода, поступающих с первой стенки. На рис. 51 представлена экспериментальная зависимость теплового потока, передаваемого лимитеру Q_L , от \bar{n} . Здесь же приведены результаты расчетов [100], полученные в предположении о доминирующем характере перезарядки на водороде, а также данные вычислений на основе (5.46) при условии полоидально-симметричного характера потерь тепла и частиц из плазмы. Обе расчетные кривые согласуются с результатами измерений, что не позволяет выделить тот или иной механизм перехода в состояние с detached plasma.

Переходу разряда в состояние с MARFE или detached plasma предшествует сильно нелинейный рост плотности плазмы в SOL при $\rho \rightarrow \rho_c$ [72]. С этим согласуются теоретические результаты. Так как $n_s = \Gamma_s \delta / (S_0 D_s) = (\Gamma_s / S_0) \sqrt{L_s / (V_s D_s)}$, то, используя связь ρ и p , получаем

$$\frac{d \ln n_s}{d \ln \rho} = \frac{1}{2} \frac{d \ln (V_s / D_s)}{d \ln T_P} \frac{d \ln T_P}{d \ln p}.$$

С ростом n_0 и приближением к точке B (см. рис. 46) $d \ln T_P / d \ln p \rightarrow \infty$ и $d \ln n_s / d \ln \rho$ также стремится к ∞ при $d \ln (V_s D_s) / d \ln T_P > 0$. Это, в частности, так для $D_s = \text{const}$ и

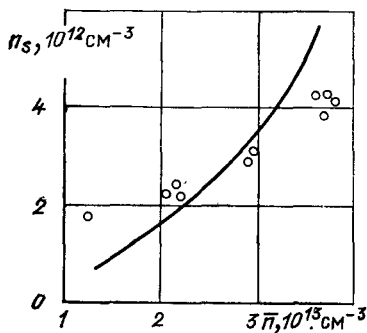


Рис. 52. Экспериментальная (точки) и расчетная (кривая) зависимости плотности плазмы на границе SOL TEXTOR ($x=0$) от \bar{n}

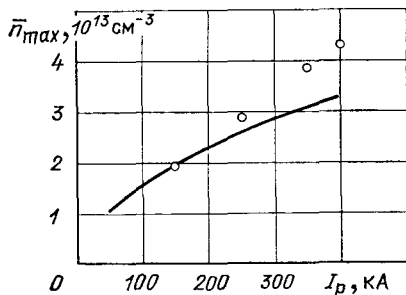


Рис. 53. Экспериментальная [103] (точки) и расчетная (кривая) зависимости предельной плотности в TEXTOR от тока в разряде

бомовского коэффициента диффузии: $D_s \sim T_p$. Экспериментальная и расчетная зависимости n_s от \bar{n} для токамака TEXTOR представлены на рис. 52. Числовые значения параметров, использованные при расчете, взяты из [21]. Коэффициент поперечной диффузии принят в SOL $1 \text{ м}^2/\text{с}$, в периферийной области $D_{\perp} = 10^{17} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}/n$.

На рис. 53 показана зависимость предельной средней плотности в TEXTOR, при превышении которой происходит срыв, от тока в разряде, рассчитанная по формуле (5.51). При расчете принималось: $n_b = 0,75\bar{n}$, $B_0 = 2 \text{ Тл}$; примесь — кислород с $\xi_I = 0,5\%$, $\kappa_{\perp} = 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. Здесь же представлены данные экспериментов [103].

Таким образом, теоретические представления о механизмах развития охлаждающей неустойчивости на примесях, перехода в состояние с излучающей периферией достаточно адекватно описывают такие явления в токамаках, как MARFE, detached plasma, существование предельной плотности. В то же время необходимо еще раз отметить, что в настоящей главе, как и в предыдущих разделах данного обзора, были использованы экспериментально найденные коэффициенты поперечного переноса примесей и основной плазмы в пристеночной области токамаков. Вопрос о их физической природе до сих пор остается открытым. Рассмотрению некоторых подходов к его решению посвящена следующая глава.

6.1. Общие сведения

Из всей совокупности экспериментальных данных, многие из которых были получены еще на первых токамаках, виден аномальный характер процессов переноса в пристеночной плазме. О нем свидетельствует, в частности, проникновение плазмы в тень лимитера на значительные расстояния. Вдоль магнитного поля нет равновесия и плазма вытекает на лимитер со скоростью ионного звука V_s . Если образующиеся нейтралы покидают SOL без ионизации, V_s определяется температурой в основном объеме SOL (см. § 3.3). Для круглого полоидального лимитера время жизни плазмы $\tau_{\parallel} = \tau R/V_s$. При этом классические и неоклассические законы движения заряженных частиц дают характерный размер экспоненциального спада плотности в SOL порядка ларморовского радиуса иона ρ_i [104]. Измеренные зависимости вида $n \sim \exp(-r/d)$ соответствуют обычно эффективному коэффициенту поперечной диффузии, определяемому как $D_{\perp} = d^2/\tau_{\parallel}$ порядка бомовского, т. е. $d \gg \rho_i$. Уже в первом токамаке [140] с помощью ленгмюровских зондов была обнаружена сильная турбулентность пристеночной плазмы, которая может быть причиной аномальных переносов.

Бомовская диффузия и теплопроводность включаются в расчетно-теоретические модели и периферийной плазмы. Эти достаточно грубые эмпирические величины используются и при расчетах реакторов-токамаков, хотя изменение коэффициентов только в несколько раз повлечет за собой серьезные проблемы технического характера. Поэтому настоятельно необходимо изучение физики аномальных процессов в пристеночной области токамаков и создание средств управления ими.

Имеется большое число теоретических работ, связывающих пристеночную турбулентность с развитием различных известных неустойчивостей плазмы (см. обзор [105]). Наибольшее внимание в последние годы обращается при этом на токовые резистивные неустойчивости неоднородной плазмы [106–108], и, в частности, на неустойчивость на примесях, вызывающую флуктуации эффективного заряда z_{ef} [109]. Специфика периферийной плазмы учитывается в этих работах относительно низкой проводимостью, большими поперечными градиентами, более высокими значениями z_{ef} и т. д. Однако и для граничащих с лимитером замкнутых магнитных поверхностей теоретические оценки дают коэффициенты турбулентной диффузии заметно меньше измеренных. В SOL должны дополнительно

действовать такие стабилизирующие эффекты, как отсутствие основного тока и малое время жизни плазмы τ_{\parallel} .

Недавно начали развиваться представления об аномальных переносах в плазме SOL, связанных с электрическим взаимодействием между плазмой и лимитером. Плазма в SOL расположена на силовых линиях магнитного поля, упирающихся в материальную поверхность, т. е. это система с *открытыми концами*. Как известно, в токамаке благодаря тороидальному дрейфу ионов и электронов вдоль магнитного поля течет электрический ток. Он встречает на своем пути эту поверхность и изменяет разность потенциалов $\Delta\phi$ между ею и плазмой. При положительном токе на стенку $\Delta\phi$ становится больше *плавающего* скачка потенциала ϕ_s , при отрицательном — меньше. Изменение скачка потенциала должно быть порядка T_e . Так как знак тока зависит от расположения силовой линии в полоидальном направлении, из сказанного следует существование в плазме SOL полоидального электрического поля порядка T_e/a [110, 111]. В силу потенциальности это поле при обходе по малому радиусу будет знакопеременным. Оно должно вызывать радиальный электрический дрейф плазмы, направление которого зависит от полоидального угла.

Уже это конвективное движение способно обеспечить за время τ_{\parallel} проникновение плазмы довольно глубоко в тень лимитера. Соответствующие решения задачи о стационарной ламинарной конвекции в тени полоидального лимитера [111, 112] согласуются качественно с рядом экспериментальных фактов. Однако эти решения неустойчивы. Существует специфическая неустойчивость плазмы в SOL, связанная с взаимодействием со стенкой и приводящая к турбулентности, зависящей от полоидального угла [113].

6.2. Уравнение для потенциала плазмы (полоидальный лимитер)

Характерный размер спадания плотности плазмы по радиусу в тени лимитера, как говорилось выше, много больше циклотронного радиуса ионов, а основное дрейфовое движение плазмы не зависит от частоты столкновений. Поэтому будем пользоваться гидродинамическим описанием, полагая плазму неизотермической. Введем правую систему тороидальных координат (r — малый текущий радиус, ψ — тороидальный угол, θ — полоидальный угол, отсчитываемый от внешнего экватора тора) (рис. 54). Полоидальный лимитер расположен при $\psi=0$. Магнитные поверхности будем считать концентрическими окружностями с осью, совпадающей с круговой осью тора.

Примем для определенности, что основной ток в плазме антипараллелен внешнему магнитному полю. Магнитные силовые

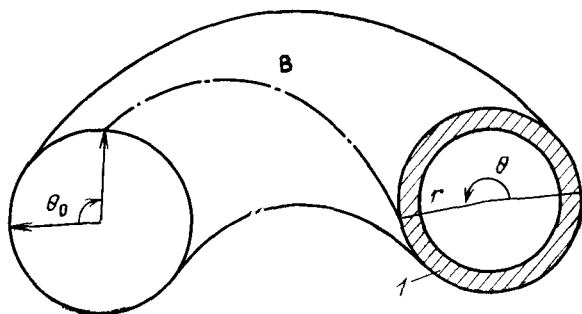


Рис. 54. Геометрия половины тора и выбор координат с кольцевым полоидальным лимитером (1)

линии, проходя от ионной стороны диафрагмы до электронной, поворачиваются на угол $\theta = 2\pi/q$. Каждый такой отрезок будем характеризовать углом θ_0 , соответствующим его середине.

Из уравнения непрерывности тока и условия равновесия по малому радиусу $j_{\perp} = c\nabla P \times \mathbf{B}/B^2$ имеем известное уравнение для тока вдоль магнитного поля

$$\frac{\partial j_{\parallel}}{\partial l} = \frac{2c}{BR} \left(-\sin \theta \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right); \quad dl = qRd\theta. \quad (6.1)$$

Принимая потенциал лимитера таким, что плотность тока на него обращается в нуль при нулевом потенциале ϕ плазмы, имеем следующее краевое условие:

$$j_{\parallel} = enV_s [1 - \exp(-e\phi/T_e)]. \quad (6.2)$$

Здесь n — плотность плазмы на внешней границе ленгмюровского слоя. При $\phi > 0$ максимальная плотность тока ограничена ионным током насыщения $j_0 = enV_s$. Вторичная эмиссия электронов пренебрежимо мала.

Температура плазмы в отсутствие сильного рециклинга выравнена вдоль магнитного поля теплопроводностью. Плотность также изменяется вдоль l несильно (см. § 4.2). Поэтому для упрощения будем полагать $n = \text{const}$ на каждом отрезке силовой линии. Аналогично пренебрежем изменением потенциала вдоль отрезка силовой линии из-за конечной проводимости и тороидального электрического поля по сравнению с изменением потенциала при переходе с одного отрезка на другой. Например, дополнительное полоидальное поле, связанное с конечной проводимостью, мало, если $(m_e/m_i)^{1/2}R/\lambda_e \ll 1$.

Градиенты температуры в тени лимитера обычно значительно меньше градиентов плотности. С учетом этого, интегрируя уравнение (6.1) вдоль силовых линий и используя (6.2), полу-

чаем следующее уравнение для потенциала плазмы:

$$\varphi^* = -\ln \left\{ 1 + \Lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta_0 + \frac{\partial u}{r \partial \theta_0} \cos \theta_0 \right) \right\}, \quad (6.3)$$

$$\text{где } \varphi^x = \frac{e\varphi}{T_e}; \quad u = \ln n; \quad \Lambda = \frac{2(T_e + T_i) cq}{eV_s B} \sin(\pi/q), \quad (6.4)$$

В условиях, когда потенциал определяется током на лимитер, он зависит от пространственных производных плотности и характерного размера $\Lambda = 2qr_i \sin(\pi/q)$. Хотя продольный ток вызван тороидальным дрейфом, величина Λ не зависит от большого радиуса и практически пропорциональна только лармовскому радиусу ионов в SOL, т. е. мало меняется для различных экспериментальных установок. Уравнение (6.3) определяет многие особенности плазмы в SOL, важнейшей из них является ее неустойчивость.

6.3. Волны дрейфового типа в SOL и их устойчивость

Примем простейшую модель плазмы, в которой стационарный профиль плотности $n = n_0 \exp(-x/d)$ ($x = r - a$; $d = \text{const}(\theta)$) удовлетворяет уравнению непрерывности для ионов

$$\partial n / \partial t + \text{div}_{\perp} (\mathbf{V}_{\perp} n) = -n / \tau_{\parallel}, \quad (6.5)$$

$$\text{где } \mathbf{v}_{\perp} n = \frac{cn(\mathbf{B} \times \nabla \varphi)}{B^2} + \frac{cT_i}{eB^2} (\mathbf{B} \times \nabla n). \quad (6.6)$$

Стационарному состоянию соответствует радиальная скорость $v_{0x} = d / \tau_{\parallel}$, которая может иметь как конвективную, так и диффузионную составляющие. Рассмотрим малые возмущения плотности вида $n' \exp[-x/d + i(k_{\theta}y - \omega t)]$, которым согласно (6.3) соответствуют возмущения потенциала $\varphi^{*'} = ik_{\theta} \Lambda \cos \theta_0 / [1 + (\Lambda/d) \sin \theta_0] (n' / n_0)$. Используя выражения для n^* , $\varphi^{*'}$ в линеаризованном уравнении (6.5) — $i\omega n' + (ik_{\theta} c \varphi^{*'}/B) dn_0/dx = 0$, получаем

$$-i\omega = \gamma = \omega^* |k_{\theta} \Lambda| \cos \theta_0 / [1 - (\Lambda/d) \sin \theta_0], \quad (6.7)$$

где использовано общепринятое обозначение частоты дрейфовых волн $\omega^* = (k_{\theta} c T_e / e B n) dn_0/dx$. Так как $dn_0/dx < 0$, плазма неустойчива при $\cos \theta_0 > 0$. Неустойчивость связана с возмущением тока на лимитер, которое, в свою очередь, изменяет распределение потенциала и создает флюктуацию полоидального электрического поля в противофазе с флюктуацией плотности. В геометрии полей, принятых на рис. 6.1, положительное возмущение плотности при этом смещается в сторону меньшей концентрации, т. е. имеет место неустойчивость конвективного

характера на внешнем обходе тора. По существу это желобковая неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле, напряженность которого убывает с увеличением малого радиуса на внешнем обходе. Хотя желобки касаются поверхности лимитера, полной стабилизации проводящими торцами не происходит в силу существования растущей вольт-амперной характеристики на границе плазма — стенка (6.2).

В рассмотренной модели не учтены такие детали, как несимметрия плазмы по полоидальному углу и зависимость $d(\theta_0)$; радиальное и полоидальное электрические поля, также зависящие от θ_0 ; вращение плазмы и т. д. Они несколько изменяют инкремент и границы неустойчивой области, но не влияют на основной результат. Большие k_θ в (6.7) ограничены эффектами конечного ларморовского радиуса ионов и широм магнитного поля. Применительно к данной неустойчивости они учтены в [114], где рассмотрена краевая задача при условии, что на границе SOL ($r=a$) возмущения равны нулю. Шир, как известно, ограничивает отношение k_θ/k_\parallel , а значение k_\parallel не должно превышать R^{-1} . В [114] показано, что максимальное значение волнового числа равно

$$k_\theta = \frac{m}{a} \simeq -\rho_i^{-1} \left[\frac{2\sqrt{2}q^2 \exp(-\varphi_0^*)}{(\pi^2 + q^2)\pi R/d} \right]^{1/3}, \quad (6.8)$$

а значение инкремента при этом

$$\gamma_m = \frac{4q \sin(\pi/q)}{3\tau_\parallel} \left(\frac{q^2}{\pi^2 + q^2} \right)^{2/3} \left[\frac{\pi R}{d} \exp(-\varphi_0^*) \right]^{1/3} \cos \theta_0. \quad (6.9)$$

Вблизи γ_m полное дисперсионное уравнение имеет следующий вид (плазма считается изотермической):

$$-i\omega\tau_\parallel = \left\{ \left[\frac{\Lambda K \tilde{a} k_\theta^3 \rho_i^2 q^2}{(\pi^2 + q^2)d} \right]^2 + \exp(-\varphi_0^*) \right\}^{-1} \left[\frac{\Lambda^2 \tilde{a} k_\theta^2 K \cos \theta_0 \cdot \exp(-\varphi_0^*)}{2d} - \frac{i \Lambda k_\theta}{8} \cos \theta_0 \left(\frac{\Lambda k_\theta^2 a \rho_i K}{d} \right)^2 \left(\frac{\pi^2 + q^2}{q^2} \right) \right]. \quad (6.10)$$

Здесь $K = \pi R / [2aq \sin(\pi/q)]$; φ_0^* определяется выражением (6.3), в котором $du_0/dr = -d^{-1}$ и пренебрегается производной $du/dr \partial \theta_0 \ll d^{-1}$. Действительная часть частоты при максимальном инкременте

$$\omega = \frac{\sqrt{2}q}{3\tau_\parallel} \sin(\pi/q) \left(\frac{2q^2}{\pi^2 + q^2} \right)^{2/3} \left[\frac{\pi R}{d} \exp(-\varphi_0^*) \right]^{1/3} \cos \theta_0 \simeq \gamma/2. \quad (6.11)$$

Полагая, что $k_r \simeq k_\theta = k_\perp$ для сильной турбулентности, к которой приводит развитие неустойчивости, оценим с помощью

(6.7) коэффициент турбулентной диффузии по формуле [115]

$$D_{\perp} \approx \gamma k_{\perp}^{-2} \approx \frac{cT_e \Lambda \cos \theta_0}{eB \sqrt{D_{\perp} \tau_{\parallel}}} \approx \alpha \frac{cT_e}{eB} \left(\frac{\Lambda}{R} \right)^{1/3} \cos^{2/3} \theta_0, \quad (6.12)$$

где

$$\alpha \approx \left(\frac{2(T_e + T_i)q \sin(\pi/q)}{\pi T_e} \right)^{1/3} \sim 1.$$

Как видно из формулы (6.12), $D_{\perp} \approx D_B$ и не зависит от масштаба турбулентных пульсаций, а также слабо зависит от размера установки.

В [114] получено выражение для D_{\perp} , полностью совпадающее с формулой (6.12).

6.4. Конвекция турбулентной плазмы в тени полоидального лимитера [116]

Рассмотрим стационарную задачу о конвекции в усредненном по времени электрическом поле. Потoki электронов и ионов в поперечном магнитному полю направлении будем описывать суммой

$$\Gamma_{\perp} = nv_{\perp}^0 - D_{\perp} \nabla_{\perp} n. \quad (6.13)$$

Здесь первое слагаемое определяется обычными уравнениями движения (6.6), а второе соответствует турбулентной диффузии из-за дрейфа на флюктуациях электрического поля. Плотность плазмы также является средней по времени величиной. Коэффициент D_{\perp} будем полагать константой.

Из уравнения непрерывности для ионов:

$$\frac{\partial(nv_{\parallel})}{\partial t} = \frac{c}{B} \left[-\frac{2T_i}{eR} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial n}{r \partial \theta} \cos \theta \right) - \frac{2n}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \cos \theta \right) + \frac{\partial n}{r \partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \right] + D_{\perp} \Delta_{\perp} n. \quad (6.14)$$

Так как плотность плазмы и температура в SOL спадают по малому радиусу гораздо быстрее, чем изменяются в полоидальном направлении, для значительного интервала углов

$$\left| \frac{\partial n}{\partial r} \sin \theta \right| \gg \left| \frac{\partial n}{r \partial \theta} \cos \theta \right|. \quad (6.15)$$

Будем в дальнейшем считать это условие выполненным.

Краевое условие для потоков ионов и электронов на лимитер, потенциал которого принят нулевым, имеет вид:

$$\Gamma_i = nV_s; \quad \Gamma_e = n(T_e / (2\pi m_e))^{1/2} \exp(-e\varphi / T_e).$$

Введем обозначения: $u = \ln(n/n_a)$; $\varphi^* = e\varphi/T_a$; $\tau = \ln(T_e/T_a)$, где n_a и T_a — плотность и температура электронов при $r=a$. Интегрируя (6.14) по l с учетом постоянства n и T на силовой линии и используя (6.3), получаем:

$$\left(\frac{e^\tau + T_i^*}{2}\right)^{1/2} = \Lambda_1 K \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial\theta_0} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta_0} \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \Lambda_1 \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial r} + \frac{\partial T_i^*}{\partial r} + T_i^* \frac{\partial u}{\partial r}\right) \sin\theta_0 + s^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]; \quad (6.16)$$

$$\varphi^*/e^\tau = \ln\left(\frac{m_i e^\tau}{2\pi m_e (e^\tau + T_i^*)}\right)^{1/2} - \ln\left\{1 + \Lambda_1 \left(\frac{2}{e^\tau + T_i^*}\right)^{1/2} \times \left[(e^\tau + T_i^*) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial(e^\tau + T_i^*)}{\partial r}\right] \sin\theta_0\right\}. \quad (6.17)$$

Здесь $T_i^* = T_i/T_a$; $\Lambda_1 = 2cqT_a (eB)^{-1} (m_i/2T_a)^{1/2} \sin(\pi/q) \approx \Lambda/2$; $K = \pi R (2aq \sin(\pi/q))^{-1}$; $s^2 = \pi R D_\perp (m_i/(2T_a))^{1/2}$. В тех же обозначениях уравнение непрерывности для электронов имеет вид:

$$[m_i e^\tau / (4\pi m_e)]^{1/2} \exp(-\varphi^*/e^\tau) = \Lambda_1 K \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial\theta_0} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta_0} \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \Lambda_1 \left[\frac{\partial e^\tau}{\partial r} + (e^\tau) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial r}\right] \sin\theta_0 + s^2 [\partial^2 u / \partial r^2 + (\partial u / \partial r)^2]. \quad (6.18)$$

Из уравнений переноса и движения можно получить следующее уравнение для температуры электронов:

$$(5/2) \operatorname{div}(nT_e \mathbf{v}_e^0) - \operatorname{div}[n\chi \nabla T_e + (3/2) T_e D_\perp \nabla_\perp n + (5/2) (cnT_e / eB^2) (\mathbf{B} \times \nabla T_e)] - nT_e \operatorname{div}(D_\perp \nabla_\perp n/n) = \mathbf{v}_e^0 \nabla(nT_e). \quad (6.19)$$

Отношение $nT_e \operatorname{div}(D_\perp \nabla n/n)$ к $\operatorname{div}(D_\perp T_e \nabla_\perp n)$ порядка d/a и последним членом слева в (6.19) можно пренебречь. Коэффициент температуропроводности χ также будем считать турбулентным и не зависящим от координат.

Краевое условие для переносимого электронами потока тепла на лимитер имеет вид

$$\left| \frac{5}{2} nT_e \mathbf{v}_{e\parallel} - n\chi_\parallel \nabla T_e \right| = (2T_e + e\varphi) \Gamma_e. \quad (6.20)$$

Потери энергии электронами при прохождении тормозящего скачка потенциала идут на ускорение ионов и передаются ими поверхности. Ускорение ионов до скорости V_s на внешней границе скачка потенциала учитывается членом $\mathbf{v}_{e\parallel} \nabla_\parallel (nT_e)$.

Подставим (6.6) в (6.19) и проинтегрируем вдоль силовых линий магнитного поля. Вычитая из полученного выражения умноженное на $(3/2)T_e$ уравнение (6.18), получаем

$$\begin{aligned}
 (1 + \varphi^*/e^\tau) \left\{ \sqrt{\frac{e^\tau + T_i^*}{2}} + \Lambda_1 \left[(e^\tau + T_i^*) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial(e^\tau + T_i^*)}{\partial r} \right] \sin \theta_0 \right\} = \\
 = s_T \left[\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial r} \right)^2 \right] + s^2 \left(\frac{3}{2} + N \right) \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \\
 + \frac{3}{2} \Lambda_1 K \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta_0} \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta_0} \right) + \\
 + \Lambda_1 \left(\frac{7}{2} e^\tau \frac{\partial \tau}{\partial r} + e^\tau \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right) \sin \theta_0, \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

где $s_T = \pi R \chi_\perp (m_i / (2T_a))^{1/2}$; $N = s_T^2 / s^2$.

В отличие от электронов ионы покидают плазму со своей средней энергией и их температура должна изменяться относительно мало. Поэтому будем полагать $T_i^* = 1$. Граничные условия для системы уравнений (6.16), (6.17) и (6.21):

$$u = \tau = 0 \text{ при } r \rightarrow a; \quad \tau \rightarrow -\infty \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (6.22)$$

Полученную систему уравнений (6.16), (6.17) и (6.21) можно приближенно решить разложением по малому параметру Λ_1/s , т. е. в предположении, что конвективный перенос мал в сравнении с турбулентной диффузией. При относительно небольших изменениях T_e можно для упрощения положить $[(e^\tau + 1)/2]^{1/2} = 1$ и $\ln[m_i e^\tau / (2\pi m_e (e^\tau + 1))]^{1/2} = \text{const} = K_1$. С точностью до членов второго порядка имеем

$$\begin{aligned}
 u = -x + (\Lambda_1/s) [(x/2) + K_1(1 - \alpha)/(2 + K_2)] \sin \theta_0 + \\
 + (\Lambda_1/s)^2 [-\lambda \sin^2 \theta_0/8 + a_1(1 - \alpha) + a_2 \lambda \alpha + a_3(1 - \alpha^2)]. \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

Здесь $x = r/a - 1$; $K_2 = [\sqrt{(2N + 3)^2 + 16(1 + K_1)N} - 2N - 3]/(4N)$; $\alpha = \exp(-K_2 x)$; $a_{1,2,3}$ зависят от N и θ_0 .

Например, для токамака «среднего размера» с параметрами $T_a = 20$ эВ, $B = 2$ Тл; $q = 3$; $R = 1,5$ м; $a = 0,35$ м при $\chi_\perp = 5D_\perp = D_B$ входящие в (6.23) величины равны (для дейтерия): $\Lambda_1 = 0,12$ см; $s = 0,37$ см; $K_1 = 2,84$; $K_2 = 0,44$. Для температуры электронов при этих параметрах справедливо уравнение

$$\tau = -0,44x + (\Lambda_1/s) [0,13x + 0,22(1 - \alpha)] \sin \theta_0. \quad (6.24)$$

На рис. 55—58 приведены результаты расчетов по (6.23) и (6.24) для указанных параметров. Рисунок 55 показывает изменение масштаба спада плотности при $r = a$ от угла θ_0 . Масштаб спада T_e примерно вдвое больше. Зависимость спада плотности от малого радиуса вблизи экстремумов кривой на

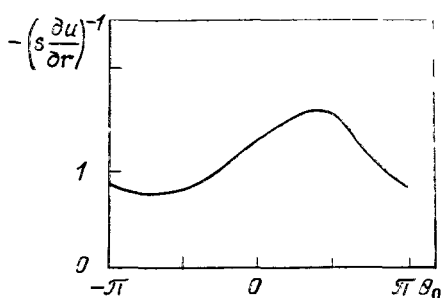


Рис. 55. Зависимость величины $-(s \cdot du/dr)^{-1}$ от угла θ_0 при $r=a$

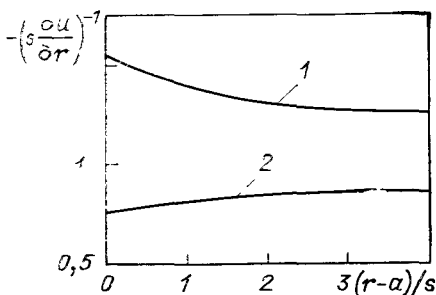


Рис. 56. Зависимость величины $-(s \cdot du/dr)^{-1}$ от $(r-a)/s$ для $\theta_0 = \pi/2$ (1) и $\theta_0 = -\pi/2$ (2)

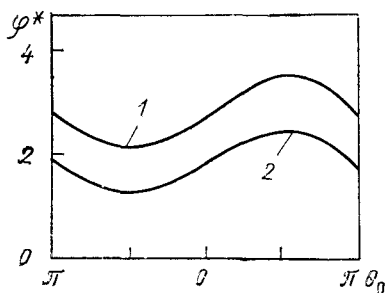


Рис. 57. Зависимость $e\varphi/T_e$ от пологидального угла θ_0 для $r=a$ (1) и $r=a+s$ (2)

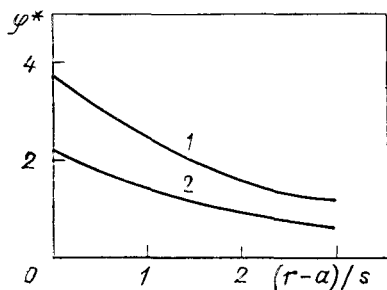


Рис. 58. Потенциал плазмы как функция $(r-a)/s$ для $\theta_0 = \pi/2$ (1) и $\theta_0 = -\pi/2$ (2)

рис. 55 приведена на рис. 56. Из этих рисунков видно, что имеет место значительная асимметрия плазмы в SOL в пологидальном направлении. Она связана с радиальным электрическим дрейфом, обусловленным зависимостью потенциала от угла θ_0 (рис. 57). Эта зависимость возникает из-за тороидального дрейфа, дополнительно заряжающего плазму относительно лимитера положительно в стороне дрейфа ионов и отрицательно в стороне электронного дрейфа. Из рис. 58 видно, что есть радиальное электрическое поле, обусловленное остыванием электронов и убывающее при удалении от края в тень лимитера.

Таким образом, плазма дрейфует по радиусу в тень лимитера на внешнем обводе тора и в пологидальном направлении в сторону роста θ_0 . Часть ее дрейфует обратно из SOL в основной объем токамака на внутреннем обходе тора. Это конвективное движение накладывается на турбулентный перенос и сопровождается уходом вдоль магнитного поля на лимитер. Упрощающее предположение о постоянстве турбулентных ко-

эффицентив D_{\perp} и χ_{\perp} не согласуется с картиной неустойчивости и оценкой (6.12). Естественно думать, что эти коэффициенты больше при $\cos \theta_0 > 0$, что значительно усилит отмеченную асимметрию плотности. При этом в области $\theta_0 \simeq \pi$ условие (6.15) может быть несправедливым. Краевые условия для уравнений, описывающих основную плазму, также являются функциями полоидального угла, что до сир пор не учитывалось при расчетах.

Неамбиоплярность радиального переноса. С асимметрией плазмы связано появление радиального электрического тока в SOL. Плотность тока на лимитер из (6.2), (6.3), (6.15)

$$j = -2e\Lambda V_s \frac{\partial n}{\partial r} \sin \theta_0. \quad (6.25)$$

Как видно из рис. 55, $\left| \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \right|$ больше при тех углах, где на лимитер протекает электронный ток. У края лимитера плотность слабо зависит от θ_0 и интегральный ток отрицателен. Глубоко в тени лимитера больше плотность плазмы в стороне ионного дрейфа, поэтому там преобладает ионный ток. За счет того, что в области с меньшими градиентами n вертикальный электрический ток, созданный тороидальным дрейфом, меньше ослабляется продольным, возникает неамбиоплярность переноса по радиусу.

Полный радиальный ток в плазме $I(r)$ через поверхность $r=r_0 > a$ равен току на лимитер при $r > r_0$. С точностью до $\Lambda/a \ll 1$

$$I(r_0) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_0 \int_{r_0}^{\infty} j r dr = 2e\Lambda a V_s \int_{-\pi}^{\pi} n(r_0, \theta_0) \sin \theta_0 d\theta_0. \quad (6.26)$$

Полный радиальный поток плазмы через ту же поверхность

$$\begin{aligned} \Gamma(r_0) &= 2aV_s \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_0 \int_{r_0}^{\infty} n(r_0, \theta_0) \exp\left(-\frac{r-r_0}{d}\right) dr = \\ &= 2aV_s \int_{-\pi}^{\pi} n(r_0, \theta_0) d(\theta_0) d\theta_0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Отношение $I/(e\Gamma)$ при больших $r_0 - a$ порядка $\Lambda_1/(2s)$, т. е. неамбиоплярность составляет заметную долю полного потока.

Существование заметного полоидального электрического поля в SOL не согласуется с условиями на замкнутых магнитных поверхностях в периферийной плазме, и полученные решения терпят разрыв при $r=a$. В [117] показано, что поляризационный дрейф ионов на границе SOL создает радиальный ток,

который часть продольного тока замыкает на периферийную плазму, минуя лимитер. Толщина переходной зоны для решения уравнений (6.23) и (6.24) при этом порядка $5r_i$.

6.5. Структура турбулентности

Чтобы найти распределение амплитуды колебаний плотности по спектру турбулентных пульсаций, необходимо учесть нелинейное взаимодействие волн. Применительно к турбулентности в SOL задача эта не решалась. Некоторые суждения об этом распределении можно сделать из следующих энергетических соображений.

Как известно, при движении плазмы поперек удерживающего магнитного поля механическая работа преобразуется в электроэнергию. Подставив в уравнение равновесия $\nabla P = (1/c)(\mathbf{j} \times \mathbf{B})$ простейший закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right)$, найдем, что выделяющаяся в единице объема мощность

$$\mathbf{v} \nabla P = -j^2/\sigma + \mathbf{j} \mathbf{E}. \quad (6.28)$$

При диффузии в однородном магнитном поле она соответствует столкновительной джоулевой диссипации. При конвекции Пфирша — Шлютера работа расширения на внешнем обходе тора затрачивается в основном на сжатие на внутреннем обходе, а малая разность этих работ также равна джоулевой диссипации в объеме. В SOL преобладает диссипация не в объеме, а при протекании тока через ленгмюровские слои у поверхности лимитера. Их эффективное сопротивление и играет роль внешней нагрузки внутреннему МГД-генератору электроэнергии.

Сложив уравнение непрерывности и движения для ионов (6.14) с аналогичным уравнением для электронов, получим

$$\mathbf{v}_\perp \nabla_\perp n = \frac{2cn}{BR} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta_0 + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta_0} \cos \theta_0 \right) - \frac{\partial}{\partial t} n (\mathbf{v}_\perp^e + \mathbf{v}_\perp^i). \quad (6.29)$$

При этом опущены добавленные в них члены с аномальной диффузией. Они содержатся в флуктуационной части уравнения (6.29) и будут найдены ниже. Второй член в этом выражении отражает уход плазмы как целого вдоль поля. С генерацией электроэнергии связан первый член. Приняв для простоты в дальнейшем $T_e = T_i = \text{const}$ и что потенциал лимитера при $r = a$ равен плавающему, т. е. на него нет внешнего тока, трудно получить из (6.1) тождество

$$e \Delta V_s \int_S n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta_0 + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \cos \theta_0 \right) dS \equiv 2 \int_S j_\parallel \varphi dS. \quad (6.30)$$

Интегрирование ведется по всему поперечному сечению SOL. Работа, совершаемая при расширении плазмы в одном месте, может диссипировать или идти на сжатие плазмы в других местах, что видно из решений, полученных в [111, 112, 116]. При разделении лимитера на изолированные элементы, находящиеся под разными потенциалами, часть вырабатываемой электроэнергии можно выделить на внешней нагрузке [112].

Многочисленные эксперименты показывают, что турбулентные пульсации в SOL коррелированы лишь на поперечных размерах, много меньших малого радиуса a . При этом и диссипация пульсаций электроэнергии происходит локально в пределах масштаба корреляции независимо от пульсаций вне его.

Фрактальная размерность хаотических колебаний в SOL по данным эксперимента не превышает 5—10 [38], т. е. они поддерживаются взаимодействием небольшого числа независимых мод. Поэтому в качестве первого приближения для определения спектра турбулентности применим требование локальности к отдельной нелинейной волне, т. е. вместо (6.30) будем рассматривать равенство

$$n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta_0 + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta_0} \cos \theta_0 \right) = \varphi \left(\frac{\partial n}{\partial r} \sin \theta_0 + \frac{\partial n}{r \partial \theta_0} \cos \theta_0 \right) \quad (6.31)$$

как уравнение для амплитуды волны, при которой она не обменивается энергией с другими волнами.

Относительный уровень флуктуаций в SOL практически не зависит от малого радиуса. Поэтому решение уравнений (6.3) и (6.31) будем искать в виде $n = n_0 + \bar{n} \exp(ik_r r + im\theta_0 - i\omega t) + \bar{n}^* \exp(i\omega t - ik_r r - im\theta_0)$, причем n_0 , \bar{n} , $\bar{n}^* \sim \exp(-r/d)$; \bar{n} и \bar{n}^* — комплексно-сопряженные амплитуды колебаний. Для боровской диффузии $d \simeq 3\Lambda$ и всегда $d \ll a$. Будем полагать $k_r a$, $k_\theta a = m \gg 1$, а также выполненным условие (6.15). Обозначим $\bar{k}_r = \Lambda k_r \sin \theta_0$; $\bar{k}_\theta = \Lambda m / (a \cos \theta_0)$. Разложим (6.3) в ряд, подставим в (6.31) и усредним по времени. Пренебрегая степенями $\Lambda \sin \theta_0 / d = \delta$ выше второй, а в выражении $X = (\bar{k}_r + i\bar{k}_\theta)^2 (\bar{n} \bar{n}^*)_r / n^2$ — выше третьей, получаем приближенное квадратное уравнение для X :

$$12X^2(1+5\delta) - X(2+\delta-30\delta^2) - \delta(\delta+1/2) = 0. \quad (6.32)$$

Его решение слабо зависит от угла θ_0 , а $X \simeq 1/4 \div 1/6$. Величина d , которая входит в (6.32) как параметр, сама зависит от уровня турбулентной диффузии.

Из полученного решения видно, что естественным масштабом поперечных длин волн является Λ , не зависящая от размеров токамака.

Уровень относительных флуктуаций, на которых диссипация в пристеночном слое ограничивает рост волны, меняется как

$$\tilde{n}^2 / \langle n \rangle^2 \sim k_{\perp}^{-2} \quad (6.33)$$

при $k_{\perp} \rho_i \sim 10^{-1}$ $\tilde{n}^2 / \langle n \rangle^2$ порядка единицы. Отношение k_r / k_{θ} и уровни турбулентности сильно зависят от полоидального угла.

Уравнение (6.32) определяет для данного волнового вектора максимальную амплитуду, до которой может нарасти рассмотренная в § 6.3 неустойчивая волна. Для больших значений $\tilde{n}^2 / \langle n^2 \rangle$ потери φj_{\parallel} превышают выделение энергии в объеме, и такие флуктуации затухают. При этом выполнение уравнения (6.31) соответствует обращению в нуль усредненного инкремента колебаний.

В заключение отметим, что рассмотренные в § 6.2—6.4 явления должны в той или иной мере проявляться в SOL с другими конструкциями лимитеров, а также в диверторных конфигурациях. Их физическую основу составляют тороидальный дрейф зарядов и условия протекания тока из плазмы на ограничивающую поверхность. Например, в случае рельсового лимитера разделение зарядов будет закорочено током вдоль магнитного поля, если силовые линии соединяют беспрепятственно верх и низ токамака. Но на концевых отрезках, где они упираются в ионную и электронную стороны лимитера, будут возникать токи на лимитер, как это показано выше для простейшего случая круглого полоидального лимитера, со всеми вытекающими последствиями. Для определения их роли нужны конкретные теоретические исследования.

6.6. Сравнение с экспериментом

Асимметрия плазмы в SOL. Сильная зависимость плотности плазмы в SOL от угла θ была найдена в ряде токамаков [118—120]. В [119] наблюдали более медленное спадание плотности в тени лимитера в стороне ионного дрейфа, что согласуется качественно с рис. 55. Вблизи внешнего экватора в ионную сторону лимитера (соответствующую движению на нее ионов в тороидальном вихревом электрическом поле) упираются отрезки силовых линий с $\theta > 0$, на которых $\varphi > 0$, а с электронной — на которых $\varphi < 0$ (рис. 57). Соответствующая разность плавающих потенциалов достигала вблизи кромки лимитера 80 В при $T_e \simeq 20$ В, а отрицательный ток на электронную сторону примерно вдвое превышал положительный ток на ионную. В [65] была измерена большая плотность плазмы возле ионной стороны лимитера в T-10. Столь значительная разница параметров с двух сторон лимитера может быть естественно связана с асимметрией по углу θ : она соответствует отрезкам разных

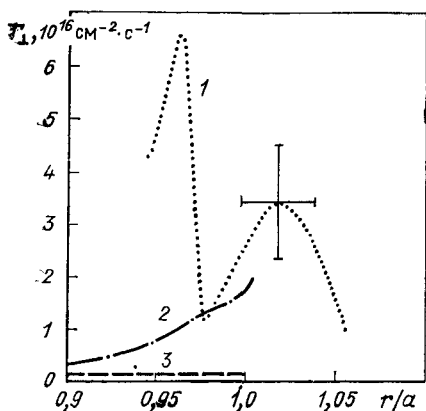


Рис. 59. Радиальный турбулентный поток частиц плазмы в пристеночной области токамака TEXT [124] ($a=27$ см):

1 — эксперимент; 2 — теория токово-резистивной турбулентности; 3 — теория турбулентности на дрейфовых волнах

силовых линий. В [119] наблюдалось также радиальное электрическое поле, согласующееся с рис. 57. Чаще всего локальные измерения в SOL производят на внешнем обводе вблизи экваториального сечения тора. На установке Alcator C [120] были проведены зондовые измерения по всему периметру для $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Обнаружена зависимость d от θ , причем характерная толщина на внутреннем обводе была примерно в 5—8 раз меньше, чем на наружном. Асимметрия потоков тепла на локальные лимитеры, расположенные равномерно по углу θ , наблюдалась в токамаке FT [121]. В PLT поток тепла на ионную сторону зонда был в 2—4 раза больше, чем на электронную. Неамбиполярный перенос в тени круглого полоидального лимитера был обнаружен и изучен на токамаке ТВ-1 [122]. Можно заключить, что явления, описанные в § 6.2 и 6.4, получили в целом качественное, а в некоторых случаях и количественное экспериментальное подтверждение.

Пристеночная турбулентность. На современном уровне изучение турбулентности было начато Зевененом и ведется на ряде токамаков и стеллараторов [105, 38, 123—125]. Использование электрических зондов позволяет измерять локальные флуктуации плотности и потенциала и их спектры, а также проводить корреляционный анализ, т. е. непосредственно находить турбулентный поток из соотношения

$$\tilde{\Gamma} = T^{-1} \int_0^T \tilde{n}(t) \tilde{v}_{\perp}(t) dt, \quad (6.34)$$

где \tilde{n} и \tilde{v}_{\perp} — флуктуации плотности и поперечной скорости, определяемой электрическим дрейфом по разности плавающих потенциалов двух зондов, деленной на расстояние между ними.

Поперечный турбулентный поток частиц имеет резко выраженный максимум в периферийной плазме непосредственно возле границы SOL, что наглядно показывает связь турбулентности с взаимодействием с лимитером. На рис. 59 приведены в качестве примера данные [124] о $\tilde{\Gamma}$. Спектры и уровень турбу-

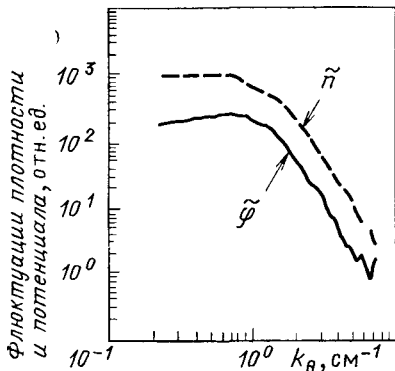


Рис. 60. Зависимости $|\tilde{n}|^2$ и $|\tilde{\varphi}|^2$ от k_θ [105]

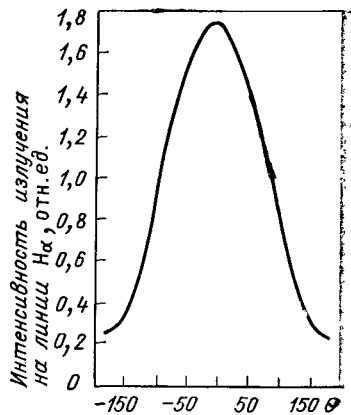


Рис. 61. Интенсивность излучения на линии H_α в зависимости от полоидального угла, измеренная в TEXT

лентности мало различаются для установок разного масштаба от ТВ-1 ($R=23,5$ см) до TFTR ($R=2,65$ м). Распределение флюктуаций по спектру частот и волновых чисел $|\tilde{n}(k, \omega)|^2 = S(k, \omega)$ показывает, что фиксированному значению k соответствует много частот с $\Delta\omega/\omega \sim 1$. Интегрирование $S(k, \omega)$ по частотам дает типичную зависимость $S(k)$, показанную на рис. 60. При больших k_θ $\tilde{n}^2 \sim k^{-q_\theta}$, где $2,5 \leq q \leq 3$ и не зависит от малого радиуса. Граница изменения зависимости $S(k)$ лежит при $k_{\theta i} \approx 0,1 \div 0,15$. Ей соответствует среднеквадратический уровень флюктуаций $\tilde{n}/n_0 \approx 0,3 \div 0,6$. Эти данные неплохо согласуются с результатами предыдущего параграфа, согласно которым такой уровень должен достигаться при $\Delta k_\theta \approx 1 \approx 10^{-1} k_{\theta i}$.

Более крутой спад \tilde{n}^2 с ростом k_θ (рис. 60) по сравнению с (6.33) не противоречит энергетическим оценкам, если энергия передается от коротких волн более длинным. В экспериментах была отмечена та особенность пристеночной турбулентности, что зависимости \tilde{n}/n_0 и $e\tilde{\varphi}/T_e$ ведут себя по-разному в противоречии с линеаризованным уравнением Больцмана $\tilde{n} \approx n_0 e\tilde{\varphi}/T_e$. Неправедливость этого уравнения в плазме SOL для волн с $k_\parallel R \leq 1$ следует из (6.3).

На рис. 61 приведена зависимость от угла θ_0 источника плазмы в периферийной области токамака TEXT с круглым полоидальным лимитером [37]. Видно, что поток плазмы в SOL на внешнем обходе тора почти на порядок больше, чем на внутреннем. Столь сильную асимметрию можно объяснить совместным действием конвекции, рассмотренной в § 6.4, и зависимостью $D_\perp(\theta_0)$ (6.12), вытекающей из желобкового характера неустойчивости. Турбулентность может проникать из тени

лимитера в периферийную плазму на расстояние порядка длины перемешивания. Диамагнитные флюктуирующие токи могут при этом связывать плазму вне SOL с током на лимитер. Можно ли объяснить пик турбулентного потока вблизи границы SOL развитой выше теорией или в его образовании играют роль иные неустойчивости, покажут дальнейшие исследования. В двухнулевом диверторе турбулентность наблюдается лишь на внешнем обходе [142], что подтверждает развитые выше представления о ее природе. Смена знака $\tilde{\Gamma}$ при $\cos \theta_0 < 0$ наблюдалась в токамаках ТФ-1 и ТМИ [145].

6.7. Перенос плазмы при стационарных возмущениях магнитного поля

Сильно стохастизированное поле. Начиная с [126] стохастизация магнитного поля рассматривалась как одна из наиболее вероятных причин аномального переноса в токамаках. В [127] показано, что в диверторных конфигурациях образование стохастического слоя при разрушении сепаратрисы может быть причиной аномальной диффузии в пристеночной области. Изучение плазмы при искусственной стохастизации магнитного поля стимулировалось развитием концепций эргодического лимитера, турбулентного плазменного бланкета [27, 128].

Если на магнитное поле токамака наложено возмущение с радиальной составляющей $B_r = b_{m,k} B_0 \sin \Psi$, где $b_{m,k} \ll 1$, $\Psi = m\theta - k\phi$, θ , ϕ — полоидальный и тороидальный углы, то вблизи резонансных магнитных поверхностей с коэффициентом запаса устойчивости q , равным m/k , возникают магнитные острова [129] (рис. 62). Возмущенные магнитные поверхности описываются уравнением

$$\xi^2 + \xi_m^2 \sin^2(\Psi/2) = \xi_0^2,$$

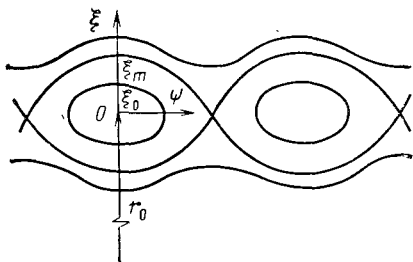
где $\xi = r_0 - r$; r_0 — малый радиус резонансной поверхности; полуширина острова равна [129]

$$\xi_m = 2 \sqrt{\frac{2q^2 R_0}{m} b_{m,k} \left(\frac{dq}{dr}\right)^{-1}}.$$

Если острова, создаваемые модами с различными m , k , перекрываются, т. е. выполнено условие [129] $s = (\xi_m + \xi'_m) |r'_0 - r_0| \gg 1$, движение силовых линий в области перекрытия является стохастическим. При смещении вдоль линии на расстояние l происходит среднеквадратическое смещение в направлении малого радиуса $\langle (\Delta r)^2 \rangle = 2lD_m$, где коэффициент диффузии D_m в квазилинейном приближении дается формулой

$$D_m = \pi R \sum_{m,k} b_{m,k}^2 \delta\left(\frac{m}{q} - k\right).$$

Рис. 62. Конфигурация магнитных поверхностей при резонансном возмущении магнитного поля



Характер переноса плазмы в стохастизированном магнитном поле зависит от соотношения между длиной пробега заряженных частиц между кулоновскими столкновениями и длиной корреляции различных мод возмущения L_c . В случае мод с одинаковыми m и разными k $L_c \approx \pi R_0 / \ln(\pi s/2)$ [129].

Если $L_c \ll \lambda_c$, среднеквадратическое смещение частиц в радиальном направлении за время Δt равно $2v\Delta t D_m$, где v — тепловая скорость, и для поперечных коэффициентов диффузии и теплопроводности электронов имеем [130, 131]

$$D_{\perp}^{\text{st}} = D_m v_i; \quad \kappa_{\perp}^{\text{st}} = D_m v_e n.$$

Для случая $\lambda_c \ll L_c$ D_{\perp} , κ_{\perp} найдены в [132, 133], где из уравнений двухжидкостной гидродинамики, линеаризованных по отношению к малым возмущениям поля \tilde{B}_r , получены соотношения для возмущений плотности \tilde{n} , температуры \tilde{T} и составляющих скорости \tilde{V}_r , \tilde{V}_{\parallel} плазмы. Коэффициент диффузии определяется соотношением $-D_{\perp} \partial n / \partial r = \overline{n \tilde{V}_{\parallel} B_r / B_0 + \tilde{n} \tilde{V}_r}$ — где $\overline{\dots}$ — усреднение по всем модам. Это дает $D_{\perp}^{\text{st}} = (4/v_i) (b_0 \omega_i / k_{\perp})^2$, где $b_0^2 = \sum_{m,k} b_{m,k}^2 v_i$ — частота ион-ионных столкновений; ω_i — ионная ларморовская частота; k_{\perp} — характерный поперечный волновой вектор возмущения.

Коэффициент теплопроводности дается соотношением

$$\kappa_{\perp}^{\text{st}} = \kappa_{\parallel}^e b_0^2 / [1 + (b_0 k_{\perp} L_c)^{-2}].$$

С целью увеличения коэффициентов переноса плазмы в SOL для понижения тепловой нагрузки на лимитер в [128] было предложено стохастизовать магнитное поле винтовой обмоткой, навитой на тор, с чередующимися направлениями тока в проводниках. Возможности этого подхода для создания турбулентного плазменного blankets рассматривались в [134]. Из-за тороидальной геометрии проводников обмотка, замыкающаяся после m_0 обходов по ϕ и k_0 — по θ , создает возмущения B_r с $m = m_0, m_0 \pm 1, m_0 \pm 2$ и т. д. [135]. Дополнительные моды возникают также из-за конечности проводников в полоидальном направлении. Составляющие B_r генерируют острова на магнитных поверхностях с разными q , пересечение которых приводит

к стохастизации магнитного поля. Чтобы локализовать возмущение поля в пристеночной области, обмотку следует выполнить с достаточно высокой мультипольностью и расположить ее близко к плазме, так как $b_{m,k} \sim \exp\left(m \frac{r-b_0}{b_0}\right)$, где b_0 — радиус поверхности, на которой находятся оси проводников.

Расчеты показывают [136], что для увеличения коэффициента диффузии в периферийной области до уровня 4—5 м²/с, необходимого для эффективности ТПБ, сила тока в обмотке составляет относительно небольшую долю тока в плазме. Предполагать резонансные обмотки нужно непосредственно вблизи стенки, что может представить известные технические трудности для реактора.

Транспортные свойства плазмы в конфигурации с магнитными островами [137]. Влияние резонансных возмущений магнитного поля на переносы в периферийной плазме экспериментально изучалось на токамаке ТЕХТ [138]. Было показано, что существенное увеличение коэффициентов поперечной диффузии и теплопроводности наблюдается при относительно малых возмущениях, когда острова, созданные разными гармониками, не перекрываются. В связи с этим в [137] была предложена теоретическая модель для транспорта плазмы в конфигурации с магнитными островами. При этом предполагалось, что коэффициенты переноса поперек возмущенных магнитных поверхностей такие же, как при отсутствии возмущения: D_{\perp} , κ_{\perp} . Внутри острова течение плазмы и электронная теплопроводность вдоль силовых линий приводят к дополнительному переносу частиц и тепла по малому радиусу. Продольная скорость в [137] найдена из приближенного решения уравнения движения, которое в координатах ξ_0 и l имеет вид:

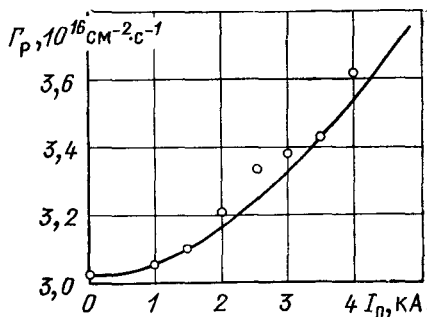
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} (m_i n V_{\parallel}^2 + 2nT) &= \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{4}{3} \eta_{\parallel} \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial l} \right) + \\ &+ \frac{\epsilon_0^2}{g_l \xi_0} \left(\eta_{\perp} \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial \xi_0} + m_i D_{\perp} \frac{\partial n}{\partial \xi_0} V_{\parallel} \right) + \\ &+ g_l \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left(\eta_{\perp} \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial \xi_0} + m_i D_{\perp} \frac{\partial n}{\partial \xi_0} V_{\parallel} \right), \end{aligned}$$

где η_{\parallel} , η_{\perp} — коэффициенты продольной и поперечной вязкости ионов; $g_l = 1 - (1 - \epsilon_0^2) \sin^2 \frac{2\pi l}{L_m}$; $\epsilon_0 = \frac{\xi_m m}{2r_0}$; $L_m = \frac{\pi \xi_m}{b_{m,k}}$ — период фазовых колебаний в острове вблизи его оси.

В результате усреднения по θ и ширине острова получены следующие соотношения для эффективных потоков частиц и

Рис. 63. Зависимость потока частиц плазмы в SOL TEXT от тока в обмотках эргодического лимитера:

точки — данные измерений, кривая — результаты расчета



тепла по малому радиусу:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\perp} &= -D_n \frac{dn}{dr} - D_T \frac{n}{T} \frac{dT}{dr}; \\ q_{\perp} &= -\kappa_T \frac{dT}{dr} + 5\Gamma_{\perp} T, \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

где $D_n = \frac{11}{16} D_{\perp} + \delta D_{\perp}$; $D_T = \delta D_{\perp}$; $\kappa_T = \frac{11}{16} \kappa_{\perp} + b_{m,k}^2 \frac{\kappa_{\parallel}^e}{2}$;

$$\delta D_{\perp} = \frac{\pi \xi_m^2}{16} v_i \frac{\rho_r^2}{1 + \rho_r^2}; \quad \rho_r = b_{m,k} \frac{\omega_i}{v_i}.$$

При $\rho_r \ll 1$, когда движение в острове определяется поперечной вязкостью ионов, добавка в коэффициенте диффузии $\delta D_{\perp} \sim b_{m,k}^3$; в противоположном случае более существенна продольная вязкость, и $\delta D_{\perp} \sim b_{m,k}$.

Уравнения (6.35) и (2.10) были использованы в [137] для расчета параметров периферийной плазмы токамака TEXT с резонансными возмущениями поля [138]. В периферийную область попадают острова с m , равным 7, 8, 9 и $k=3$, которые не перекрываются при токе в обмотке I_0 ниже 5 кА. Для невозмущенных коэффициентов переноса на основе данных [138] принималось: $D_{\perp}^* = \kappa_{\perp} / 5n$, $\kappa_{\perp} = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$; $n_0 = 2,5 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$. На рис. 63 представлена расчетная зависимость потока плазмы в SOL, Γ_p , от I_0 . Здесь же приведена экспериментальная зависимость, полученная из спектроскопических измерений. Имеется хорошее согласие результатов теории и эксперимента.

Список литературы

1. Тамм И. Е.// Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 3—19.
2. Сахаров А. Д.// Там же. С. 20—30.
3. Зубарев Д. Н., Климов В. Н.// Там же. С. 138—160.
4. Брягинский С. И.// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183—272.
5. Stangeby P. C.// Physics of Plasma—Wall Interactions in Controlled Fusion: Col. articles/ Ed. by D. E. Post, R. Behrisih. N. Y.: Plenum Press, 1986. P. 41—138.

6. Chodura R.// Phys Fluids. 1982. Vol. 25, No. 9. P. 1628—1633.
7. Игитханов Ю.Л., Пистунович В. И., Пожаров В. А. Препринт ИАЭ № 4217/8. М.: ИАЭ, 1985.
8. Chodura R./ Proc 12th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Budapest. 1985. Vol. 9F, Part 2. P. 472—475.
9. Takizuka T., Tani K., Azumi M., Shimizu K.// J. Nucl. Mater. 1984. Vol. 128—129. P. 104—110
10. Daybelge U., Bein B.// Phys. Fluids. 1981. Vol. 24, No. 6. P. 1190—1194.
11. Stangeby P. C.// J. Nucl. Mater. 1987. Vol. 145—147. P. 105—116.
12. Bailey A. W., Emmert G. A.// Nucl. Fusion. 1984. Vol. 24, No 11. P. 1439—1450.
13. Сизоненко В. Л., Шергин Г. Г.// Физика плазмы. 1981. Т. 7, С. 1258—1272.
14. Bell A. R., Evans R. G., Nicholas M. N.// Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, No. 4. P. 243—246.
15. Luciani J. F., Mora P.// Ibid. 1983. Vol. 51, No. 18. P. 1664—1667.
16. Albritton J. R., Williams E. A., Bernstein I. B., Swartz K. P.// Ibid. 1986. Vol. 57, No. 15. P. 1887—1890.
17. Игитханов Ю. Л., Юшманов П. Н.// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. М.: ИАЭ, 1988. Вып. 2. С. 61—63.
18. Мартыненко Б. В.// Итоги науки и техники Сер. Физика плазмы// Под ред. В. Д. Шафранова. М.: ВИНТИ, 1982. С. 119—175.
19. Haefetz D. B.// Physics of Plasma-Wall Interactions in Controlled Fusion: Col. articles/ Ed. by D. E. Post, R. Behrisch. N. Y.: Plenum Press, 1986. P. 695—771.
20. Janev R. K., Langer W. D., Evans K., Post D. E.// Princeton Plasma Phys. Lab. Rep. PPPL// TM-368, 1985.
21. Samm U., Bogen P., Hartwig H. e. a./ Proc. 8th Int. Conf. on Plasma Surface Interactions in Controlled Fusion Devices. Julich. 1988. P. 14.
22. Rehker S., Wobig H.// Plasma Phys. 1973. Vol. 15. No. 11. P. 1083—1097.
23. Недоспасов А. В., Токарь М. З.// Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 6. С. 1376—1380.
24. Walker J. D., John R. M.// J. Chem. Phys. 1974. Vol. 61, No. 6. P. 2394—2407.
25. Janev R. K., Post D. E., Langer W. D. e. a // J. Nucl. Mater. 1984. Vol. 121. P. 10—16.
26. Lehnert B.// Nucl. Fusion. 1986. Vol. 8, No. 2. P. 173—181.
27. Vasilyev N. N., Nedospasov A. V., Petrov V. G., Tokar' M. Z./ Proc. 8th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Prague. 1977. Vol. 1. P. 164.
- Васильев Н. Н., Недоспасов А. В., Петров В. Г., Токарь М. З.// Атомная энергия. 1978. Т 44, вып. 4. С. 336—339.
28. Константинов О. В., Перель В. И.// Журн. техн. физ. 1960. Т. 30, № 12. С. 1485—1488.
29. Connor J. W.// Plasma Phys 1977. Vol. 19. No. 9, P. 853—873.
30. Tendler M./ Proc. 9th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Oxford. 1979. Vol. 1. P. 112.
31. Игитханов Ю. Л., Стаханов И. П.// Физика плазмы. 1978. Т. 4. Вып. 5. С. 1004—1014.
32. Васильев Н. Н., Недоспасов А. В., Токарь М. З.// Там же. 1982. Т. 8. Вып. 1. С. 37—44.
33. Tokar' M. Z.// Physica Scripta. 1985. Vol. 31. P. 411—414.
34. INTOR. Phase Two A Part 2. Vienna: IAEA, 1986.
35. Alexander K. F., Günter K., Hintze W. e. a.// Nucl. Fusion. 1986. Vol. 26, No. 12. P. 1575—1590.

36. Erents S. K., Tagle J. A., Mc Gracken G. M.// Proc. 14th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Madrid, 1987. Vol. 11D, Part 1. P. 740—743.
37. Rowan W. L., Klepper C. C., Ritz C. P. e. a// Nucl. Fusion. 1987. V. 27, No. 7. P. 1105—1118.
38. Zweben S. J., Manos D., Budny R. V. e. a// J. Nucl. Mater. 1987. Vol. 145—147. P. 250—254.
39. Nedospasov A. V., Tokar' M. Z./ Proc. 10th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Moscow, 1981. Vol. 1. P. J 10.
40. Токарь М. З.// Атомная энергия. 1984. Т. 56, Вып. 3. С. 165—172.
41. Petravíc M., Heifetz D. B., Kuo-Petravic G., Arzt T.// J. Nucl. Mater. 1987. Vol. 145—147. P. 841—843.
42. Токарь М. З.// Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 1. С. 99—104.
43. Недоспасов А. В., Токарь М. З.// Там же. 1986. Т. 287, № 6. С. 1387—1393.
44. Колесников В. К., Недоспасов А. В., Токарь М. З.// Докл. 3-й Всесоюзн. конф. по инженерным проблемам термоядерных реакторов, 1984. М.: ЦНИИ-атоминформ, 1984. Т. 4. С. 18—25.
45. Mahdavi M. A., DeBoo J. C., Hsich C. L. e. a// Phys. Rev. Let. 1981. Vol. 47, No. 22. P. 1602—1605.
46. Nedospasov A. V., Tokar' M. Z./ Proc. 11th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Aachen, 1983. Vol. 7F, Part 2, P. 21.
47. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
48. Tokar' M. Z./ Proc. 12th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Budapest, 1985. Vol. 9F, Part 2. P. 496—499.
49. Tokar' M. Z./ Proc. 8th Int. Conf. on Plasma Surface Interaction in Controlled Fusion Devices, Jülich, 1988. P. C. 3.
50. Potters J. H. H. M., Goedheer W. T.// Nucl. Fusion. 1985. Vol. 25, No. 7. P. 779—794.
51. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М. ИИЛ, 1960.
52. Крашенинников С. И., Пожаров В. А. Препринт ИАЭ № 4217/8. М.: ИАЭ, 1985.
53. Krasheninnikov S. I., Kukushkin A. S., Pistunovich V. I., Pozharov V. A.// Nucl. Fusion. 1987. Vol. 27, No. 11. P. 1805—1816.
54. Крашенинников С. И., Кукушкин А. С., Пистуневич В. И., Пожаров В. А.// Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11, № 7. С. 1061—1065.
55. Nedospasov A. V., Tokar' M. Z./ Proc. 4th Tech. Com. Meet. and Workshop. on Fusion Reactor Design and Technology 1986, Vienna: IAEA, 1987. Vol. 2. P. 113—124.
56. Harbour P. J., Johnson P. C., Proudfoot G. e. a// J. Nucl. Mater. 1984. Vol. 128—129. P. 359—367.
57. Пярнпуу А. А., Шидловский В. П.// Молекулярная газодинамика: Сб. статей/ Под ред. В. В. Струминского. М.: Наука, 1982. С. 99—107.
58. Krasheninnikov S. I., Pigarov A. Yu./ Proc. 11th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1986. Vienna: IAEA, 1987. Voll. 3. P. 387—394.
59. Shimamura Y., Keilhacker M., Lackner K. e. a// Inst. Plasma Phys. Rep IPP III/80, 1982.
60. Ohyabu N., Chase R., Kahn C. e. a// I Nucl. Mater. 1984. Vol. 128—129. P. 275—279.
61. Игитханов Ю. Л., Кукушкин А. С., Пигаров А. Ю., Пистуневич В. И.// Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 2. С. 338—343.
62. Keilhacker M., Becker G., Behringer K. e. a./ Proc. 9th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1982. Vienna: IAEA, 1983. Vol. 1. P. IAEA-CN-41/R-2.

63. **Petravic M., Heifetz D., Kuo-Petravic G., Post D.**// J. Nucl. Mater. 1984. Vol. 128—129. P. 111—113.
64. **Lackner K., Ditte U., Fussmann G. e. a.**/ Proc. 10th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1984. Vienna: IAEA, 1985. Vol. 1. P. IAEA-CN-44/A-V-4.
65. **Alexander K. F., Dietrich L., Grote H. e. a.**/ Proc. 11th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1986. Vienna: IAEA, 1986. Vol. 1. IAEA-CN-47/A-IV-5.
66. **Petrov V. G.**// Nucl. Fusion. 1984. Vol. 24, No. 3. P. 259—266.
67. **Капторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. М.: Наука, 1965. С. 163.
68. **Nedospasov A. V., Tokar' M. Z., Vasin N. L.**// Contr. Plasma Phys. 1988. Vol. 28, No. 4/5. P. 453—458.
69. **Mioduszewski P.**// J. Nucl. Mater. 1982. Vol. 111—112. P. 253—267.
70. **Токарь М. З.**// Атомная энергия. 1986. Т. 61, Вып. 6. С. 440—443.
71. **Nagami M., Kasai M., Kitzunezaki A. e. a.**// Nucl. Fusion. 1984. Vol. 24, No. 2. P. 183—200.
72. **Lipschultz B.**// J. Nucl. Mater. 1987. Vol. 145—147. P. 15—25.
73. **McGracken G. M., Stott P. E.**// Nucl. Fusion. 1979. Vol. 19, No. 7. P. 889—981.
74. **Sigmund P.**// Phys. Rev. 1969. Vol. 184, No. 2. P. 383—416.
75. **Roth J., Bohdanský J., Ottenberger W.**// Inst. Plasma Phys. Rep. IPP 9/26, 1979.
76. **Smith D. L.**// J. Nucl. Mater. 1978. Vol. 75, No. 1, P. 20—31.
77. **Claassen H. A., Repp H.**// Nucl. Fusion. 1981. Vol. 21, No. 5. P. 589—601.
78. **Абрамов В. А., Игитханов Ю. Л., Пистуневич В. И., Пожаров В. А.** Препринт ИАЭ № 4189/6. М.: ЦНИИАтоминформ. 1987.
79. **McGracken G. M.**// Rep. Prog. Phys. 1975. Vol. 38. P. 241—327.
80. **Войцеля В. С., Васильев В. В.**// Поверхность: Физ., химия, мех. 1985. № 6. С. 146—148.
81. **Engelhardt W., Feneberg W.**// J. Nucl. Mater. 1978. Vol. 76—77. P. 518—520.
82. **Post D. E., Jensen R. V., Tarter C. B. e. a.**// Princeton Plasma Phys. Lab. Rep. PPPL—1352, 1977.
83. **Токарь М. З.**// Физика плазмы. 1982. Т. 8, Вып. 3. С. 453—457.
84. **Hirshman S. P.**// Phys. Fluids. 1976. Vol. 19, No. 1. P. 155—158.
85. **Neuhauser J., Schneider W., Wunderlich R., Lackner K.**// J. Nucl. Mater. 1984. Vol. 121. P. 194—198.
86. **Claassen H. A., Repp H.**// Nucl. Fusion. 1983. Vol. 23. No. 5. P. 597—607.
87. **Harbour P. J., Morgan J. G.**/ Proc. 12th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Aachen. 1983. Vol. 7D, Part 2. P. 427—430.
88. **Токарь М. З.**// Nucl. Fusion. 1985. Vol. 25, No. 6. P. 713—719.
89. **Nedospasov A. V., Tokar' M. Z.**// Ibid. 1981. Vol. 21, No. 4. P. 465—472.
90. **Токарь М. З.**/ Докл. 3-й Всесоюз. конф. по инженерным проблемам термоядерных реакторов, 1984. М.: ЦНИИАтоминформ, 1984. Т. 4. С. 3—10.
91. **Claassen H. A., Gerhauser H.**// Inst. Plasma Phys. Rep. Jül—1971, 1985.
92. **Brooks J. N.**// J. Nucl. Mater. 1987. Vol. 145—147. P. 837—840.
93. **Stangeby P. C., Wood L., Hoskins S.**/ Proc. 14th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Madrid. 1987. Vol. 11D, Part 2, P. 714—717.
94. **Krashenninnikov S. I.**// Contr. Plasma Phys. 1988. Vol. 28, No. 4/5. P. 433—437.
95. **Obyabu N.**// Nucl. Fusion. 1979. Vol. 19, No. 11. P. 1491—1497.
96. **Токарь М. З.**// Ibid. 1983. Vol. 23, No. 10. P. 1395—1398.

97. **Stringer T. E.**/ Proc. 12th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Budapest, 1985. Vol. 9F, Part 1. P. 86—89.
98. **Neuhauser J., Schneider W., Wunderlich R.**// Ibid. Part 2. P. 476—479.
99. **Neuhauser J., Schneider W., Wunderlich R.**// Nucl. Fusion. 1986. Vol. 26, No. 12. P. 1679—1692.
100. **Tokar' M. Z.**/ Phoc. 15th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Dubrovnick. 1988. Vol. 12B. Part 2. P. 675—678.
101. **Phaneuf R. A., Janev R. K., Pindzola S.**// Oak-Ridge Nath. Lab, Rep. ORNL—6090. 1987.
102. **Dylla H. F., Bell M. G., Blanchard W. R. e. a.**// J. Nucl. Mater. 1987. Vol. 145—147. P. 48—60
103. **Castracane J., Demers Y., Pospieszczyk A.**// Ibid. 1987. Vol. 27, No. 11. P. 1921—1925.
104. **Boozer A. H.**// Phys. of Fluids. 1976. Vol. 19, No. 8. P. 1210—1216.
105. **Liewer P. C.**// Nucl. Fusion. 1985. Vol. 25, No. 5, P. 543—621.
106. **Callen J. D., Carreras B. A., Diamond P. H.**// Proc. 9th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1982. IAEA, 1985. Vol. 1. P. IAEA-CN-41 D—2—2.
107. **Thayer D. R., Diamond P. H., Wootton A. J.**// J. Nucl. Mater. 1987. Vol. 145—147. P. 803—806.
108. **Terry P. W., Diamond P. H.**// Phys. Fluids. 1985. Vol. 28, P. 1419—1439.
109. **Недоспасов А. В., Закиров Р. М.**// Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, Вып. 3. С. 165—168.
110. **Motley R. W.**// Nucl. Fusion. 1981. Vol. 21, No. 12. P. 1541—1548.
111. **Nedospasov A. V., Petrov V. G., Fidel'man G. N.**// Ibid. 1985. Vol. 25, No. 1. P. 21—27.
112. **Фидельман Г. Н.**// Физика плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 10. С. 1176—1185.
113. **Колесников В. К., Недоспасов А. В.**// Докл. АН СССР. 1987. Т. 294, № 4. С. 845—847.
114. **Петров В. Г.**// Физика плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 11. С. 1295—1300.
115. **Кадомцев Б. Б., Погуче О. П.**// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1967. Вып. 5. С. 209—350.
116. **Nedospasov A. V., Petrov V. G.**// Nucl. Fusion. 1986. Vol. 26, No. 11. P. 1529—1536.
117. **Петров В. Г.**// Физика плазмы. 1987. Т. 13, № 11. С. 909—914.
118. **Бугаря В. И., Грашкин С. А., Чаикин А. В.** Препринт ИАЭ № 3866/7. М., ИАЭ, 1983.
119. **Fidel'man G. N., Ivanov R. S., Stotsky G. J.**/ Proc. 11th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. Aachen. 1983. Vol. 7F, Part 2. P. 409—412.
120. **La Bombard B., Lipchultz B.**// Nucl. Fusion. 1987. Vol. 27, No. 1. P. 81—89.
121. **Ivanov R. S., Nedospasov A. V., Fidel'man G. N.**/ Proc. 10th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Moscow. 1981. Vol. 1. P. J—3.
122. **Ferro C., Franconi E., Maddaluno G. e. a.**// Ibid. Proc. 12th Europ. Conf. Budapest. 1985. Vol. 9F, Part 1. P. 555—558.
123. **Levinson S. J., Beall J. M., Powers E. J. e. a.**// Nucl. Fusion. 1984. Vol. 24, No. 5. P. 527—540.
124. **Ritz C. P., Bravenec R. V., Bengtson R. D. e. a.**// J. Nucl. Mater. 1987. Vol. 145—147. P. 241—244.
125. **Weisen H., Hollenstein Ch., Behn R.**// Plasma Phys. Contr. Fusion. 1988. Vol. 30, No. 3. P. 293—309.
126. **Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z., Taylor J. B., Zaslavsky G. M.**// Nucl. Fusion. 1966. Vol. 6. No.3. P. 297—302.
127. **Морозов Д. Х., Погуче О. П.**// Физика плазмы. 1982. Т. 8. Вып. 3. С. 444—452.

128. Feneberg W.// Proc. 8th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Prague. 1977. Vol. 1 P. 4.
129. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
130. Stix T. H.// Nucl. Fusion, 1978. Vol. 18, No. 3. P. 353—359.
131. Rechester A. B., Rosenbluth M. N.// Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40, No. 1. P. 38—41.
132. Yamagishi T., Hinton F. L., Bhadra D. K., Miller R. L.// Nucl. Fusion. 1983 Vol. 23, No. 2. P. 189—194.
133. Yamagishi T., Shu M. S., Bhadra D. K., Hinton F. L.// J Nucl. Mater. 1984. Vol. 128—129. P. 118—122.
134. Токарь М. З.// Физика плазмы 1979. Т. 5, Вып. 2. С. 454—457.
135. Морозов А. И., Соловьев Л. С.// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 3—52.
136. Nedospasov A. V., Tokar' M. Z.// J. Nucl. Mater. 1980. Vol. 93—94. P. 248—251.
137. Tokar' M. Z./ Proc. 14th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Madrid. 1987. Vol. 13F, Part 2. P. 687—690.
138. Ohyaabu N., deGrassie J. S., Brooks N. e. a.// Nucl. Fusion. 1985. Vol. 25, No. 11. P. 1684—1688.
139. Крашенинников С. И.// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. М.: ИАЭ, 1988. Вып. 2. С. 8—12.
140. Пистунович В. И.// Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 134—155.
141. Крашенинников С. И.// Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 48, Вып. 5 С. 287—289.
142. Rudyj A., Bengtson R. D., Carlson A. e. a./ Proc. 16th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Venice. 1989. Vol. 13B, Part 1. P. 27—30.
143. Post D. E., Langer W. D., Petravic M.// J. Nucl. Mater. 1984. Vol. 121. P. 171—177.
144. Saito S., Kobayashi T., Sugihava M. e. a.// Nucl. Fusion. 1985. Vol. 25, № 7. P. 828—834.
145. Бычков С. С., Зыков Н. М., Иванов Р. С. и др. Препринт ИВТАН № 7—273. М.: ИВТАН, 1989.

Введение

В ближайшем будущем термоядерные исследования на токамаках вступят в новую фазу — фазу тритиевых экспериментов на смеси дейтерия с тритием. Задачей тритиевых экспериментов будет демонстрация возможности осуществления и исследования режимов с достаточно мощным термоядерным энерговыделением, характерным для реакторов-токамаков. В настоящее время с целью снижения радиационной опасности все эксперименты проводятся на слабо реагирующем дейтерии или водороде.

Основное отличие тритиевых экспериментов от нынешних будет заключаться в появлении в плазме энергичного компонента — термоядерных α -частиц, рождаемых в ядерных реакциях с энергией 3,52 МэВ. Нейтроны, выделяющиеся в термоядерных реакциях, будут уходить из плазмы и поглощаться в blankets реактора, а α -частицы, в которых выделяется 20% полной термоядерной мощности, должны удерживаться в плазме и передавать свою энергию основным компонентам.

Для того чтобы почувствовать, что представляет собой быстрый компонент термоядерных α -частиц, выполним некоторые оценки.

Плотность энергичных, надтепловых α -частиц n_α определяется временем их охлаждения τ_s :

$$n_\alpha/\tau_s = n^2 \langle \sigma_T v \rangle / 4,$$

где n — плотность плазмы, состоящей из дейтерия и трития; $n_d = n_t = n/2$; σ_T — сечение термоядерных реакций. Учитывая, что $\tau_s \sim T^{3/2}/n$, где T — температура плазмы, получаем, что относительная плотность α -частиц

$$n_\alpha/n = n\tau_s \langle \sigma_T v \rangle \quad (1)$$

зависит только от температуры плазмы. При $T = 10$ кэВ $n_\alpha/n = 7,5 \cdot 10^{-4}$. При этом энергосодержание в α -частицах $\epsilon_\alpha n_\alpha$ сравнимо с энергосодержанием основной плазмы. С ростом температуры плотность потока α -частиц быстро нарастает: $n_\alpha/n \sim T^{7/2}$. Например, при $T = 30$ кэВ $n_\alpha/n = 2,5 \cdot 10^{-2}$, что в усло-

виях ограниченного β приводит к заметному снижению мощности термоядерных реакций.

Скорость α -частиц при рождении $v_\alpha = 1,3 \cdot 10^9$ см/с меньше тепловой скорости электронов: $v_{Ti} < v_\alpha < v_{Te}$. Ее ларморовский радиус в поле $B = 5$ Тл равен $\rho_L \approx 5$ см, что составляет примерно $1/20$ малого радиуса плазменного шнура в реакторе-токамаке.

Роль α -частиц в токамаке и, следовательно, актуальность их исследований проиллюстрированы рис. 1, на котором изображены две крайние возможности в поведении α -частиц в условном реакторе мощностью 1 ГВт. Рис. 1,а соответствует самоподдерживающейся термоядерной реакции — α -частицы хорошо удерживаются в плазме, передают ей всю свою энергию и полностью компенсируют потери энергии из плазмы. Другой предельный случай, изображенный на рис. 1,б, соответствует полной потере α -частиц на стенку. При этом для поддержания заданной температуры потребуется использовать дополнительный нагрев мощностью ~ 200 МВт, и стоимость термоядерного реактора возрастет как минимум на 30%. Кроме того, удвоится тепловая нагрузка на первую стенку, причем дополнительные 200 МВт будут выходить в виде энергичных α -частиц, глубоко проникающих в материал стенки и приводящих к ее сильному разрушению.

Следует отметить, что выделение энергии α -частиц в плазме еще не гарантирует осуществления самоподдерживающейся реакции. Эксперименты, выполненные в последнее время на токамаках, показывают, что энергетическое время жизни τ_E зависит от профиля источника нагрева. В частности, использование дополнительных методов нагрева приводит, как правило, к ухудшению удержания энергии в плазме и к уменьшению энергетического времени τ_E . Может оказаться, что нагрев плазмы термоядерными α -частицами будет ухудшать удержание энергии и частиц настолько, что самоподдерживающаяся реакция станет невозможной. Основанием к таким опасениям служит известная неустойчивость термоядерного горения.

До сих пор исследования поведения термоядерных α -частиц в плазме токамака проводилось в основном теоретиками. Лишь в последнее время в связи с появлением крупных установок, таких, как JET, TFTR и других, с высоким значением параметров появилась возможность исследовать в эксперименте динамику продуктов термоядерных реакций. Широкое исследование физических процессов, связанных с термоядерными α -частицами, возможно лишь в тритиевом эксперименте, который должен дать новую физическую информацию и, возможно, привести к изменению классических теоретических предположений, сформировавшихся в отсутствие реальных экспериментов. Тем не менее представляется целесообразным собрать существующие

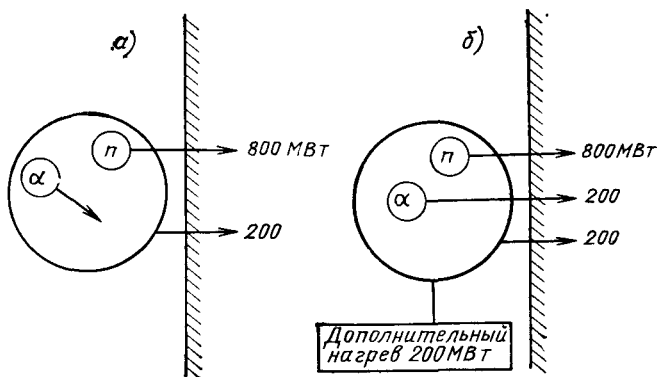


Рис. 1. Баланс энергии в токамаке:

а — самоподдерживающаяся реакция; б — все α -частицы теряются на стенку

теоретические представления и идеи относительно поведения термоядерных α -частиц в плазме токамака.

Некоторые важные проблемы остались вне рамок настоящего обзора. Не будут рассмотрены кинетические неустойчивости плазмы, возбуждаемые термоядерными α -частицами. Изложение этого вопроса можно найти в обзоре [1]. Обсуждение ряда интересных физических явлений, связанных с появлением в плазме термоядерных α -частиц, содержится в обзорной работе [2].

Глава 1

КИНЕТИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕРМОЯДЕРНЫХ ПРОДУКТОВ В ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

1.1. Ядерные реакции в термоядерной плазме

В реакторе-токамаке для производства энергии, по-видимому, будет использоваться реакция дейтерия с тритием, которая имеет большое сечение при низких температурах плазмы ($T \approx 20$ кэВ), характерных для токамака. Однако в смеси дейтерия с тритием кроме $d-t$ протекают и другие реакции, приводящие к образованию энергичных термоядерных частиц. Хотя выделение энергии в таких дополнительных реакциях мало по сравнению с $d-t$ -реакцией, их продукты могут быть использованы для диагностики плазмы в токамаке. Кроме того, в ряде работ рассматривается возможность использования для производства энергии безнейтронной реакции $d-{}^3\text{He}$. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть все реакции, про-

Таблица 1. Ядерные реакции в смеси протонов, дейтерия, трития и ^3He

Номер реакции	Реакция и энергетический выход (кэВ)
1а	$d + t = \alpha (3518) + n (14072) + 17590$
1б	$d + t = {}^5\text{He} + \gamma + 16632 = \alpha + n + \gamma + 17590$
2а	$d + d = {}^3\text{He} (817) + n (2452) + 3269$
2б	$d + d = t (1008) + p (3025) + 4033$
2в	$d + d = \alpha + \gamma + 23843$
3а	$t + t = \alpha + n + n + 11332$
3б	$t + t = {}^5\text{He} (1729) + n (8645) + 10374 = \alpha + n + n (8645) + 11332$
4а	$t + {}^3\text{He} = d (9547) + \alpha (4774) + 14321$
4б	$t + {}^3\text{He} = {}^5\text{He} (1856) + p (9282) + 11138 = \alpha + n + p (9282) + 12096$
4в	$t + {}^3\text{He} = \alpha + n + p + 12096$
5а	$d + {}^3\text{He} = p (14683) + \alpha (3671) + 18354$
5б	$d + {}^3\text{He} = {}^5\text{Li} + \gamma + 16384 = \alpha + p + \gamma + 18354$
6а	${}^3\text{He} + {}^3\text{He} = p + p + \alpha + 12860$
6б	${}^3\text{He} + {}^3\text{He} = {}^5\text{Li} (1816) + p (9078) + 10894 = \alpha + p + p (9078) + 12860$
7	$p + d = {}^3\text{He} + \gamma + 5494$
8	$p + t = {}^3\text{He} + n - 763$

текающие в смеси протонов, дейтерия, трития и ^3He . Ядерные реакции, возможные в такой смеси, представлены в табл. 1 [3, 4]. У каждой реакции указан энергетический выход (кэВ). Реакции 1б, 3б, 4б, 5б, 6б идут с образованием промежуточных короткоживущих ядер ${}^5\text{He}$ и ${}^5\text{Li}$. Если в результате реакции образуются две частицы, то их энергия однозначно определяется законами сохранения энергии и импульса. В этом случае энергия продуктов (в системе центра масс) указана в табл. 1. Все реакции, кроме последней, идут с выделением энергии. Последняя реакция эндотермическая и имеет порог по энергии 763 кэВ.

В настоящее время сечения реакций при низких энергиях известны с хорошей точностью. Так в [5] сечение $d-t$ -реакции было измерено с погрешностью $\leq 1,4\%$ в диапазоне энергий $5 \text{ кэВ} \leq E \leq 50 \text{ кэВ}$. Выполнены точные измерения сечений реакций $d-d$ (экспериментальная погрешность $< 3\%$) и $t-t$ (погрешность $< 5\%$) в том же диапазоне энергий [6]. При больших энергиях сечения известны с погрешностью $\pm 10\%$ [7]. С той же точностью измерено сечение реакции ${}^3\text{He}-{}^3\text{He}$ [8]. Зависимость сечения реакции $t-{}^3\text{He}$ от энергии приводится в [9].

При низких значениях энергии реагирующих частиц величина сечения определяется кулоновским экранированием ядер, которое входит в выражение для сечения в виде множителя $E^{-1} \exp(-B/\sqrt{E})$, где E — энергия в системе центра масс частиц;

$$B = \pi Z_1 Z_2 (e^2/\hbar c) (2\mu c^2)^{1/2}; \quad (1.1)$$

$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса реагирующих частиц; Z_1, Z_2 — их заряды [10]. Поэтому для описания сечений реакций обычно используют функцию $S(E)$:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{B}{\sqrt{E}}\right). \quad (1.2)$$

Функция $S(E)$ достаточно плавная, что позволяет подобрать единую аппроксимационную формулу для основных реакций из табл. 1:

$$S(E) = S_0 \frac{1 + a(E - E_0) + b(E - E_0)^2}{1 + c(E - E_0)^2}. \quad (1.3)$$

В табл. 2 приведены значения констант S_0, a, b, c, E_0 и константы B из выражения (1.2). Размерность констант в табл. 2 такова, что в (1.2) и (1.3) E — в кэВ и σ — в 10^{-24} см². Там же приведена относительная погрешность δ аппроксимационных формул (1.2) и (1.3). В отличие от аппроксимационных формул, приведенных в [11], выражение (1.3) правильно описывает сечения при больших энергиях реагирующих частиц.

На рис. 2 показаны зависимости сечений реакций № 1—6 от энергии реагирующих частиц в системе центра масс, полученные с помощью формул (1.2), (1.3). Там же приведено сечение реакции № 8, взятое из [12].

Часть реакций из табл. 1 идет с образованием γ -излучения (реакции № 16, 26, 56 и 7). Последнее время эти реакции привлекают внимание в связи с возможностью их использования для диагностики термоядерной плазмы [13, 14]. Экспериментальные измерения показали, что сечения канала реакций с образованием γ -квантов невелики и составляет 10^{-4} — 10^{-7} полного сечения реакции.

Для термоядерного синтеза представляют интерес зависимости скоростей реакций $\gamma(T) = \langle \sigma v \rangle$ от температуры ионов плазмы [угловые скобки означают усред-

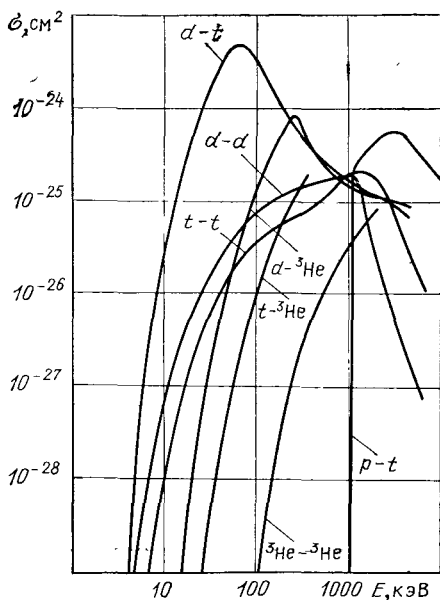


Рис. 2. Зависимость сечения реакций из табл. 1 от энергии реагирующих частиц в системе центра масс. Для $d-d$ -реакции приведено суммарное сечение по двум каналам

Таблица 2. Коэффициенты для аппроксимационных формул (1.2) и (1.3)

Номер реак- ции	Диапазон энергии, кэВ	S_0	a	b	c	E_0	B	$\delta, \%$
1а	$E < 4000$	26798	0	$1,1177 \cdot 10^{-5}$	$6,4330 \cdot 10^{-4}$	48,7878	34,3812	$2, E \leq 50$ $10, 50 < E \leq 600$ $15, 600 < E \leq 4000$
	$E \leq 1000$	52,6	$6,1787 \cdot 10^{-3}$	$-2,0475 \cdot 10^{-6}$	0	0		$3, E \leq 50$
	$E > 1000$	395,0	$5 \cdot 10^{-9}$	0	$2,967 \cdot 10^{-7}$	2250,0	31,3952	$10, 50 < E \leq 2000$ $15, 2000 < E \leq 10000$
2а	$E \leq 1000$	56,0	$3,4339 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	31,3952	$3, E \leq 50$
	$E > 1000$	342,0	0	0	$6,709 \cdot 10^{-7}$	1750,0		$10, 50 < E \leq 2000$ $15, 2000 < E \leq 10000$
		155,0	0	$6,839 \cdot 10^{-6}$	0	175,0	38,4226	$3, E \leq 200$
3	$E < 654$	573,0	0	0	$3,665 \cdot 10^{-6}$	1000,0		$10, 200 < E \leq 2000$
	$E \geq 654$	700,0	$1,571 \cdot 10^{-2}$	0	0	0	76,7562	$20, E < 400$
		6500,0	0	$5,846 \cdot 10^{-5}$	0	0	68,7380	$10, E < 2000$
4	$E < 400$	18400,0	0	$4,733 \cdot 10^{-6}$	$8,710 \cdot 10^{-5}$	200,0		
	$E \leq 100$	5200,0	$5,3846 \cdot 10^{-4}$	$2,692 \cdot 10^{-7}$	0	0	153,6867	$10, E < 1200$
	$E > 100$							
5а	$E < 1200$							

Примечание. Для реакций № 3 и 4 приведено суммарное сечение по всем каналам. Сечения каналов 4а, 4б, 4в в диапазоне энергий 112–300 кэВ относятся как 43:6:51

Таблица 3. Константы для аппроксимационных формул (1.7) и (1.8)

Номер реакции	V_0	T_0	d	g
1а	$8,9720 \cdot 10^{-13}$	-1,0134	$6,386 \cdot 10^{-3}$	1,877
2а	$1,741 \cdot 10^{-16}$	-93,320	0	-16,847
2б	$1,1763 \cdot 10^{-16}$	-136,46	0	-15,957
6а	$1,8766 \cdot 10^{-13}$	3,2179	$4,771 \cdot 10^{-4}$	13,705

Продолжение табл. 3

Номер реакции	μ	ν	C	$\delta, \%, T, \text{кэВ}$
1а	0,16176	1,5	19,9826	1, $T < 50$
2а	0,3843	0,5	18,8085	2, $T < 100$
2б	0,3807	0,5	18,8085	1,5, $T < 100$
6а	0,05204	1,18	31,7126	1,5, $T < 100$

нение по максвелловским функциям распределения реагирующих частиц $f_1(\mathbf{v})$ и $f_2(\mathbf{v})$]:

$$\gamma(T) = \iint f_1(\mathbf{v}_1) \cdot f_2(\mathbf{v}_2) \sigma(|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| d^3\mathbf{v}_1 d^3\mathbf{v}_2. \quad (1.4)$$

Переходя от \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 к относительной скорости $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ и скорости центра масс $\mathbf{V} = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) / (m_1 + m_2)$, последнее выражение можно привести к виду

$$\gamma(T) = \left(\frac{\mu}{2\pi T}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mu u^2}{2T}\right) \sigma(u) u^3 du. \quad (1.5)$$

При малой температуре интеграл в (1.5) вычисляется методом перевала, что для (1.2) дает асимптотическую зависимость

$$\gamma \sim T^{-2/3} \exp(-C/T^{1/3}). \quad (1.6)$$

Поэтому аппроксимационные формулы для $\gamma(T)$ удобно выбрать в виде

$$\gamma(T) = V(T) T^{-2/3} \exp(-C/T^{1/3}). \quad (1.7)$$

Константа C в (1.7) однозначно определяется константой B , входящей в выражение для сечения реакций (1.5). Такой подход использовался в работах [11, 15, 16]. Ниже приведены аппроксимационные формулы для реакций № 1а, 2а, 2б, 6а, согласованные с выражениями для сечений (1.2) и (1.3):

$$\gamma(T) = \frac{V_0}{T^{2/3}} \left[\frac{T - T_0}{1 + d(T - T_0)^2} + g \exp(-\mu T^\nu) \right] \exp\left(-\frac{C}{T^{1/3}}\right). \quad (1.8)$$

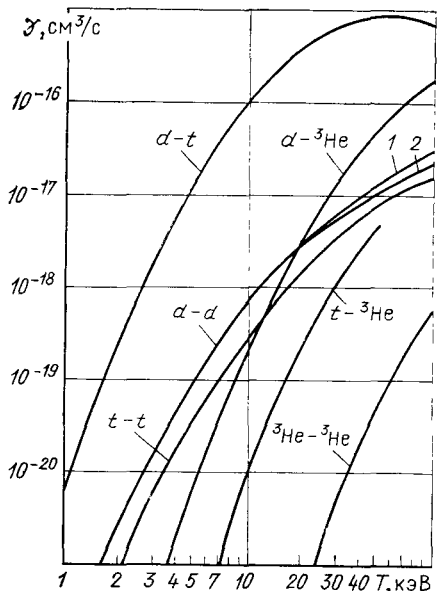


Рис. 3. Зависимость скорости реакции $\gamma(T) = \langle \sigma v \rangle$ от температуры максвелловской плазмы: 1 — $d(d, ^3\text{He})n$; 2 — $d(d, t)p$

В табл. 3 приведены константы V_0 , T_0 , d , g , μ , ν , C . Размерность этих констант такова, что $[T]$ выражена в кэВ, $[\gamma]$ — в $\text{см}^3/\text{с}$. Там же указана максимальная относительная погрешность формул (1.8).

На рис. 3 показаны зависимости скоростей термоядерных реакций от температуры ионов максвелловской плазмы для некоторых реакций из табл. 1.

Следует отметить, что при низкой температуре ионов основной вклад в скорость

реакций γ дают надтепловые частицы с энергией, в несколько раз превосходящей температуру ионов. Для примера на рис. 4 изображена зависимость подынтегрального выражения в (1.5) от безразмерной энергии $\mu u^2/(2T)$ для значений температуры T , равной 2, 10, 20 кэВ, рассчитанная для реакции $d-t$. Там же для сравнения пунктиром показано максвелловское распределение $e^{-\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}$. Вполне вероятно, что в плазме токамака функция распределения ионов в области далекого хвоста отличается от максвелловской, и поэтому при низкой температуре надежность формул (1.9) невысока. В ряде работ учитываются эффекты, приводящие к искажению функции распределения при больших энергиях и, следовательно, к изменению скоростей реакций при низкой температуре (см., на-

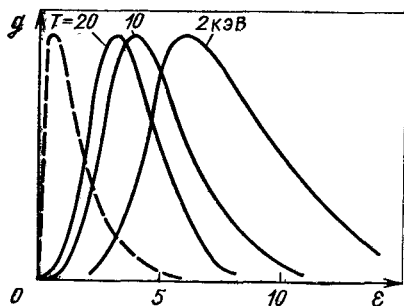


Рис. 4. Зависимость $g = \exp[-\mu u^2/(2T)] \sigma(u) u^3$ от $\varepsilon = \mu u^2/(2T)$ при различной температуре. Пунктир — максвелловское распределение

пример, [17]). Однако, поскольку плазма в токамаке далека от термодинамического равновесия, надежность подобных расчетов не выше тех, которые основаны на максвелловском распределении.

1.2. Энергетические спектры источников термоядерных частиц

В том случае, когда в результате реакции рождаются две частицы, законы сохранения энергии и импульса однозначно определяют энергию продуктов в системе центра масс, а распределение источника по энергии — моноэнергетическое:

$$\varphi(v) = \frac{1}{4\pi v^2} \delta(v - v_0), \quad (1.9)$$

где v — скорость термоядерных частиц в системе центра масс; $mv_0^2/2$ — энергия рождения частицы.

В случае реакции с образованием трех частиц, например 3α , распределение частиц в системе центра масс можно описать следующей зависимостью [18]:

$$\varphi_1(v_1) = \frac{4}{\pi^2 v_{1\max}^4} \{v_{1\max}^2 - v_1^2\}^{1/2}, \quad (1.10)$$

где $\frac{m_1 v_{1\max}^2}{2} = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon$ — полная кинетическая энергия трех частиц.

Рассмотрим теперь реакции, проходящие с образованием промежуточного ядра, например, реакцию № 36. Ядро ${}^5\text{He}$ и первый нейтрон имеют моноэнергетические распределения, которые легко рассчитать с помощью законов сохранения. Через 10^{-20} с после своего рождения ядро ${}^5\text{He}$ распадается на α -частицу и второй нейтрон с выделением энергии $E_\Delta = 957$ кэВ:



В системе координат, движущейся вместе с ядром ${}^5\text{He}$, скорости α -частицы и нейтрона равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} v'_\alpha &= \left\{ \frac{2E_\Delta}{m_\alpha} \frac{m_n}{m_\alpha + m_n} \right\}^{1/2}; \\ v'_n &= \left\{ \frac{2E_\Delta}{m_n} \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_n} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Здесь m_α и m_n — массы α -частицы и нейтрона. Обозначим E_{He} энергию ядра ${}^5\text{He}$ и v_{He} — его скорость; $v_{\text{He}} = \sqrt{2E_{\text{He}}/m_{\text{He}}}$. Возвращаясь в систему центра масс, получаем

$$v_\alpha^2 = v'^2_\alpha + v_{\text{He}}^2 + 2v'_\alpha v_{\text{He}} \chi, \quad (1.13)$$

где $\chi = \cos \theta$, а θ — угол между скоростью α -частицы v'_α и скоростью ядра ${}^5\text{He}$. Можно считать, что вылет продуктов реакции (1.11) происходит изотропно и поэтому их распределение по углам вылета описывается формулой $\varphi(\chi) d\chi = (1/2) d\chi$. Переходя от χ к v_α , с помощью (1.13) получаем

$$\varphi(v_\alpha) = \frac{1}{2\pi v_\alpha} \frac{\theta((v_{\max} - v_\alpha)(v_\alpha - v_{\min}))}{v_{\max}^2 - v_{\min}^2}, \quad (1.14)$$

где

$$v_{\max, \min} = \left| \left(\frac{2E_\Delta m_n}{m_\alpha(m_\alpha + m_n)} \right)^{1/2} \pm \left(\frac{2E_{\text{He}}}{m_{\text{He}}} \right)^{1/2} \right|;$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1; & x > 0; \\ 0; & x \leq 0. \end{cases}$$

Распределения (1.10), (1.11) и (1.14) нормированы таким образом, что $\int \varphi(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = 1$.

Зная скоростные спектры продуктов реакций в системе центра масс, можно найти их спектры в лабораторной системе координат:

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) = \int F_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha) \varphi(\mathbf{u}_\alpha) d^3\mathbf{u}_\alpha. \quad (1.15)$$

Здесь

$$F_{\gamma\beta}(\mathbf{V}) = \int f_\gamma \left(\mathbf{V} + \frac{m_\beta}{m_\beta + m_\gamma} \mathbf{u} \right) f_\beta \left(\mathbf{V} - \frac{m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \mathbf{u} \right) \sigma_{\gamma\beta}(|\mathbf{u}|) |\mathbf{u}| d^3\mathbf{u} \quad (1.16)$$

— функция распределения по скоростям центров масс реагирующих частиц сортов γ и β ; f_γ , f_β — их скоростные функции распределения. В случае максвелловских функций распределения реагирующих частиц $F_{\gamma\beta}$ легко вычисляется:

$$F_{\gamma\beta}(V) = \left(\frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{MV^2}{2T} \right) n_\gamma n_\beta \gamma(T), \quad (1.17)$$

где $M = m_\gamma + m_\beta$; T — температура; n_γ , n_β — плотности реагирующих компонентов; $\gamma(T)$ — скорость реакции (1.7). Поскольку температура плазмы мала по сравнению с энергией частиц, то доплеровское уширение, которое описывает формула (1.15), важно лишь для реакций с моноэнергетическим источником (1.9). В этом случае из (1.15) легко получить распределение источника термоядерных частиц [19]:

$$S_{\gamma\beta}(v_\alpha) = n_\gamma n_\beta \gamma(T) \left(\frac{M}{2\pi T} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi v_\alpha^2} \exp \left(-\frac{M(v_\alpha - v_{0\alpha})^2}{2T} \right), \quad (1.18)$$

где $m_\alpha v_{0\alpha}^2/2$ — энергия родившейся частицы в системе центра масс.

Рис. 5. Энергетические спектры термоядерных источников нейтронов и протонов в максвелловской плазме с температурой $T=10$ кэВ, состоящей из смеси d , t и ${}^3\text{He}$ ($n_d=n_t=n_{\text{He}}=10^{14}$ см $^{-3}$)

В том случае, когда в результате образуются частицы с широким энергетическим спектром (1.10), (1.14), доплеровское уширение приводит лишь к небольшому сглаживанию резкой границы спектра и поэтому его можно не учитывать.

На рис. 5 и 6 для примера показаны энергетические спектры источников термоядерных продуктов, рождающихся в максвелловской плазме с температурой 10 кэВ, состоящей из равнокомпонентной смеси дейтерия, трития и ${}^3\text{He}$, с плотностью $n_d=n_t=n_{\text{He}}=10^{14}$ см $^{-3}$. Спектры рассчитаны с помощью формул (1.9), (1.10), (1.14), (1.15), (1.17). Такие распределения по энергиям имеют частицы, сразу уходящие из плазмы за пролетное время. К ним относятся нейтроны и часть заряженных частиц, траектория которых выходит на стенку. Пики нейтронов при энергии 2,45 МэВ и протонов при энергии около 3 МэВ связаны с $d-d$ -реакциями; $d-t$ -реакции дают пик нейтронов при

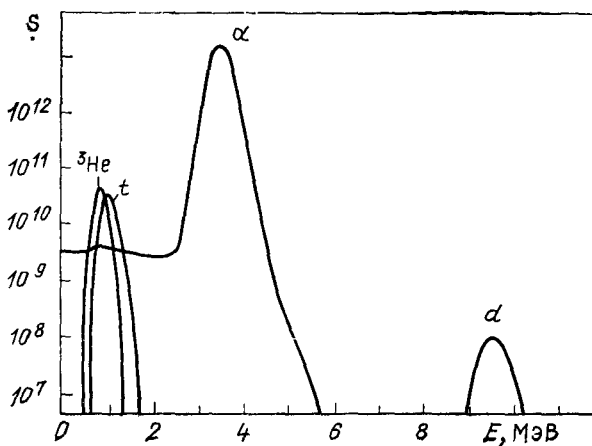
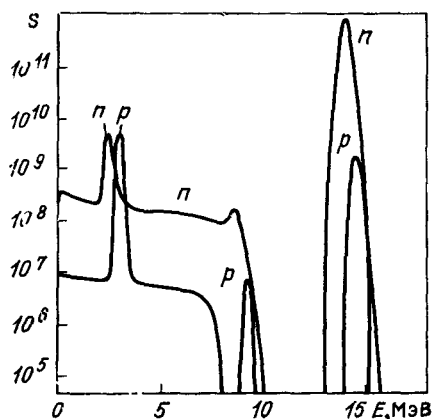


Рис. 6. Энергетические спектры термоядерных источников α -частиц, тритонов t , дейтронов d и ионов ${}^3\text{He}$ в максвелловской плазме с температурой $T=10$ кэВ, состоящей из смеси d , t и ${}^3\text{He}$ ($n_d=n_t=n_{\text{He}}=10^{14}$ см $^{-3}$)

энергии 14 МэВ, а протоны с той же энергией рождаются в реакции $d - {}^3\text{He}$. При температуре $T=10$ кэВ скорость реакций $d - {}^3\text{He}$ примерно на три порядка ниже скорости $d - t$ -реакций (см. рис. 3).

1.3. Взаимодействие энергичных термоядерных частиц с плазмой

Те термоядерные частицы, которые удерживаются в токамаке, передают свою энергию плазме в результате кулоновских столкновений с ионами и электронами. Торможение пробных ионов в плазме описывается следующим уравнением [20]:

$$\frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} = - \frac{4\pi e^4 Z_\alpha^2}{v_\alpha} \left\{ \frac{4\lambda_e}{3\sqrt{\pi}} \frac{n_e}{m_e} \left(\frac{m_e}{m_\alpha} \right)^{3/2} \left(\frac{\varepsilon_\alpha}{T_e} \right)^{3/2} + \lambda_i \sum_\beta \frac{Z_\beta^2 n_\beta}{m_\beta} \right\}, \quad (1.19)$$

где ε_α — энергия ионов; λ_i, λ_e — кулоновские логарифмы для ионов и электронов плазмы; n_e, T_e — плотность и температура электронов, Z_β, n_β и m_β — заряд, плотность и масса ионов сорта β . Первое слагаемое в (1.19) описывает торможение на электронах, второе — на ионах плазмы.

Для термоядерных температур в токамаке $T \approx 10 \div 20$ кэВ скорость заряженных продуктов реакций v_α лежит в диапазоне

$$v_{Ti} < v_\alpha < v_{Te}, \quad (1.20)$$

где v_{Ti}, v_{Te} — тепловые скорости ионов и электронов плазмы. Поэтому правую часть (1.19) можно упростить и представить в более удобном виде:

$$\frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} = - \frac{\varepsilon_*}{\tau_s^\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} + \sqrt{\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}} \right), \quad (1.21)$$

где

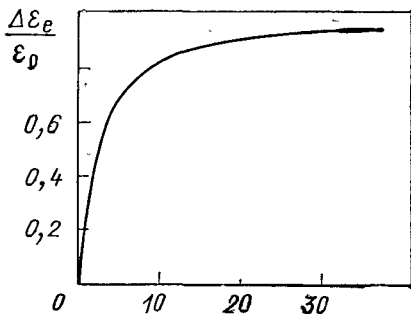
$$\tau_s^\varepsilon = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{m_\alpha}{m_p^{1/2}} \frac{T_e^{3/2}}{\lambda_e e^4 Z_\alpha^2 n_e} = 0,01 \left(\frac{10}{\lambda_e} \right) \left(\frac{m_\alpha}{m_p} \right) \frac{1}{Z_\alpha^2} \frac{(T_e)^{3/2}}{(n_e/10^{14})}; \quad (1.22)$$

$\varepsilon_* = m_\alpha v_*^2/2$ — энергия частицы, при которой сравниваются скорости торможения на ионах и электронах плазмы; m_p — масса протона;

$$v_* = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \frac{m_p}{n_e} \sum_\beta \frac{Z_\beta^2 n_\beta}{m_\beta} \right)^{1/3} \left(\frac{2T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (1.23)$$

Часто вместо τ_s^ε используется время торможения $\tau_s = 2\tau_s^\varepsilon$.

Рис. 7. Зависимость доли энергии α -частицы, передаваемой электронам плазмы, от электронной температуры $\epsilon_0/\epsilon_* \sim T_e^{-1}$



Для α -частиц энергия ϵ_* мала по сравнению с энергией рождения $\epsilon_* \ll \epsilon_0$, и поэтому большую часть своей энергии α -частицы передают электронам плазмы. Действительно, используя (1.21), можно записать выражения для долей энергии, передаваемых ионам и электронам плазмы при полном охлаждении α -частицы:

$$\frac{\Delta\epsilon_e}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_*}{\epsilon_0} \int_0^{\epsilon_0/\epsilon_*} \frac{x^{3/2} dx}{1+x^{3/2}}; \quad (1.24)$$

$$\frac{\Delta\epsilon_i}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_*}{\epsilon_0} \int_0^{\epsilon_0/\epsilon_*} \frac{dx}{1+x^{3/2}}. \quad (1.25)$$

На рис. 7 показана зависимость $\Delta\epsilon_e/\epsilon_0$ от ϵ_0/ϵ_* . В частности, при температуре $T=10$ кэВ для α -частиц в дейтериево-тритиевой смеси имеем

$$\epsilon_0/\epsilon_* \simeq 15; \quad \Delta\epsilon_e/\epsilon_0 \simeq 0,87. \quad (1.26)$$

Рассеяние α -частиц по углу в пространстве скоростей мало. Рассеяние на электронах мало из-за большой разницы масс, а рассеяние на ионах начинает сказываться, когда энергия α -частиц заметно уменьшится и достигнет значения ϵ_* . Угол, на который рассеется α -частица за время торможения до энергии $\epsilon_0/2$, можно оценить следующим образом:

$$\Delta\theta \simeq \frac{m_i}{m_\alpha} \left(\frac{\epsilon_*}{\epsilon_0} \right)^{3/2} \ll 1. \quad (1.27)$$

1.4. Вторичные реакции

В термоядерной плазме возможны ядерные реакции, в результате которых образуются частицы, способные сами вступать в реакции. Примером тому является реакция $d+d=t+p$, проходящая с образованием ионов трития с энергией ~ 1 МэВ. Высокоэнергетические тритоны могут участвовать в $d+t=n+\alpha$ -реакции и генерировать $d-t$ -нейтроны и α -частицы. Несмотря на малую плотность энергичных термоядерных частиц $n_\alpha/n \ll 1$, мощность реакций второго поколения заметна на фоне

реакций в основной плазме, что связано с сильной зависимостью сечения реакций от энергии частиц. В частности, в чисто дейтериевой плазме нейтронный выход вторичных реакций может использоваться для исследования удержания продуктов термоядерных реакций [21].

Для расчета спектров источников вторичных реакций нам понадобится функция распределения быстрых первичных продуктов. В этом параграфе функция распределения термоядерных частиц будет найдена в приближении однородной плазмы. Явления, связанные с неоднородностью плазмы и ее конечными размерами, будут рассмотрены ниже.

Функция распределения термоядерных частиц f_α описывается следующим кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = St_e(f_\alpha) + St_i(f_\alpha) + S^\alpha, \quad (1.28)$$

где $St_e(f_\alpha)$, $St_i(f_\alpha)$ — интегралы столкновений с электронами и ионами плазмы; S^α — мощность источника термоядерных частиц. Учитывая условие (1.20), электронный интеграл столкновений можно записать в виде

$$St_e(f_\alpha) = \frac{1}{\tau_s} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 f_\alpha + \frac{T_e}{m_\alpha} \Delta_v f_\alpha \right\}. \quad (1.29)$$

Первое слагаемое в (1.29) описывает торможение α -частиц, второе — рассеяние на электронах. Отметим, что второе слагаемое в (1.29) в T/ε_α раз меньше первого.

Ионный интеграл столкновений при условии (1.20) выглядит следующим образом:

$$St_i(f_\alpha) = \frac{1}{\tau_s} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v_*^3 f_\alpha + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{m_i}{m_\alpha} \frac{v_{Ti}^2 v_*^3}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{m_i}{m_\alpha} \frac{v_*^3}{v} \Delta_\theta f_\alpha \right\},$$

где Δ_θ — угловая часть лапласиана в пространстве скоростей. Из сравнения слагаемых, описывающих угловое рассеяние быстрых частиц на ионах и электронах плазмы, видно, что ионное рассеяние превосходит электронное в $v_{Te}/v \gg 1$ раз. В то же время диффузия по v оказывается в $(\varepsilon_\alpha/T)^{3/2} (m_e/m_i)^{1/2}$ раз больше на электронном компоненте. Таким образом, оставляя в (1.28) лишь главные члены, получаем

$$St(f_\alpha) = \frac{1}{\tau_s} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 + v_*^3) f_\alpha + \right. \\ \left. + \frac{T_e}{m_\alpha} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{m_i}{m_\alpha} \frac{v_*^3}{v} \Delta_\theta f_\alpha \right\}. \quad (1.30)$$

Следует отметить, что малой диффузией по скорости в формуле (1.30) обычно можно пренебречь. Кроме того, в приближении однородной плазмы функция распределения энергичных частиц изотропна в пространстве скоростей, и поэтому третье слагаемое в (1.30) обращается в нуль. В результате получаем

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_s} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 + v_*^3) f_{\alpha} + S^{\alpha}(t, v). \quad (1.31)$$

Уравнение (1.31) можно решить в общем виде. Для этого воспользуемся функцией

$$f_0(t, t_0, v, v_0) = \exp\left(3 \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\tau_s(t')}\right) \theta(t - t_0) \delta(C^{1/3}(v, t) - v_0), \quad (1.32)$$

где $C = v^3 \exp\left(3 \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\tau_s(t')}\right) + 3 \int_{t_0}^t \frac{v_*^3(t')}{\tau_s(t')} \exp\left(3 \int_{t_0}^{t'} \frac{dt''}{\tau_s(t'')}\right) dt''$,

которая является решением уравнения

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{\tau_s v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 + v_*^3) f_0 + \delta(t - t_0) \delta(v - v_0).$$

С помощью f_0 общее решение (1.31) можно записать в виде

$$f_{\alpha}(v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f_0(t, t_0, v, v_0) S^{\alpha}(t_0, v_0) dt_0 dv_0. \quad (1.33)$$

В частности, для стационарного случая и моноэнергетического источника частиц из (1.32) и (1.33) следует:

$$f_{\alpha}(v) = \begin{cases} \frac{\gamma_{\gamma\beta} n_{\gamma} n_{\beta} \tau_s}{v^3 + v_*^3}, & v \leq v_{0\alpha}; \\ 0, & v > v_{0\alpha}, \end{cases} \quad (1.34)$$

где n_{γ} , n_{β} — плотности реагирующих компонентов основной плазмы. Плотность быстрых частиц в плазме равна

$$n_{\alpha} = (1/3) \gamma_{\gamma\beta} n_{\gamma} n_{\beta} \tau_s \ln 2. \quad (1.35)$$

Вернемся теперь ко вторичным реакциям, которые могут происходить между термоядерными частицами и ионами основной плазмы. Так как энергия термоядерных частиц существенно превышает температуру плазмы, то можно пренебречь тепловым движением ионов основной плазмы и считать их неподвижными. Подставляя в (1.16) $f_{\beta} = n_{\beta} \delta(\mathbf{v})$, получаем

$$F_{\alpha\beta}(V) = n_{\beta} \left(\frac{M}{m_{\alpha}}\right)^4 f_{\alpha}\left(\frac{M}{m_{\alpha}} V\right) \sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{M}{m_{\alpha}} V\right) V. \quad (1.36)$$

Здесь индекс α относится к термоядерным частицам, β — к ионам основной плазмы. Перепишем выражение (1.15) в виде

$$S_{\alpha\beta}(v) = 2\pi \int F_{\alpha\beta}(u) \varphi(v^2 + u^2 - 2uv\chi) u^2 du d\chi = \\ = 2\pi \int_0^{\infty} F_{\alpha\beta}(u) G(u, v) u du, \quad (1.37)$$

где
$$G(u, v) = \int_{-1}^1 \varphi(v^2 + u^2 - 2uv\chi) d\chi. \quad (1.38)$$

Используя в (1.37) выражение (1.36), имеем

$$S_{\alpha\beta}(v) = 2\pi \left(\frac{M}{m_\alpha}\right)^4 n_\beta \int_0^{\infty} j_\alpha\left(\frac{M}{m_\alpha} u\right) \sigma\left(\frac{M}{m_\alpha} u\right) G(u, v) u^3 du. \quad (1.39)$$

Выражения для $G(u, v)$ для функций $\varphi(v)$, задаваемых формулами (1.9), (1.10) и (1.14), легко получаются в результате интегрирования в (1.38). Например, в случае моноэнергетического источника (1.9) получаем

$$G(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi v_{0\alpha} v u}; & |v - v_{0\alpha}| \leq u \leq v + v_{0\alpha}; \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.40)$$

На рис. 8 показаны скоростные спектры α -частиц и нейтронов, рождающихся во вторичных реакциях $d-t$ в дейтериевой плазме с $T=10$ кэВ и плотностью $n_d=10^{14}$ см $^{-3}$.

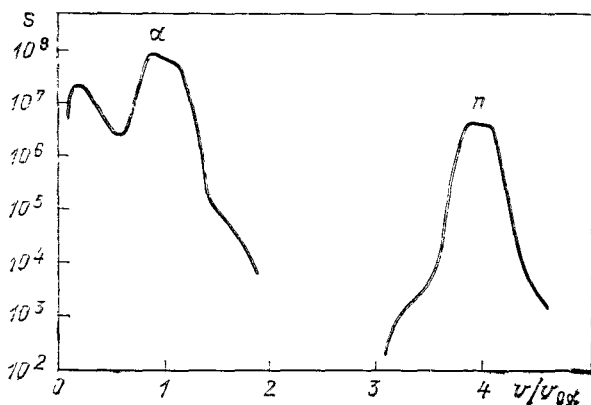


Рис. 8. Скоростные спектры α -частиц и нейтронов n , рождающихся во вторичных $d-t$ -реакциях в дейтериевой плазме; $T=10$ кэВ, $n_d=10^{14}$ см $^{-3}$

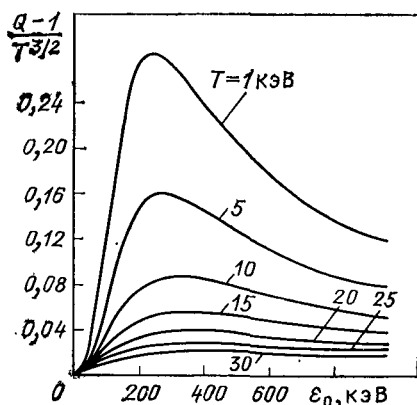


Рис. 9. Зависимость коэффициента усиления энергии Q тритонов в дейтериевой плазме от энергии тритона при различной температуре плазмы

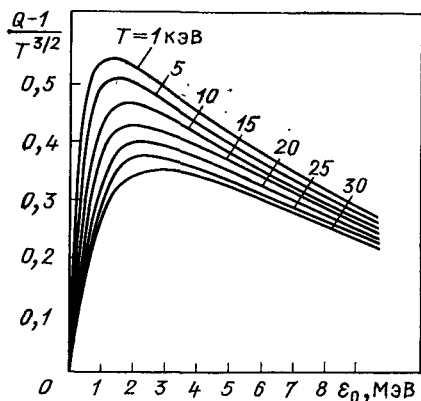
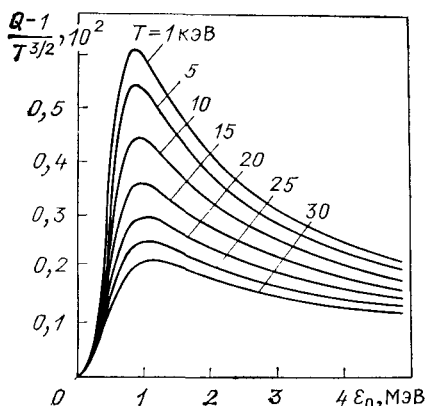


Рис. 10. Зависимость коэффициента усиления энергии Q дейтронов в дейтериевой плазме [реакция (2а)]. Масштаб по вертикальной оси увеличен в 10^3 раз

Рис. 11. Зависимость коэффициента усиления энергии Q для ионов ${}^3\text{He}$ в дейтериевой плазме



Если проинтегрировать $S_{\alpha\beta}(v)$ по скоростям, используя (1.40) и выражение (1.34) для функции распределения f_{α} , в котором мощность источника первичных реакций $\gamma_{\nu\beta}n_{\nu}n_{\beta}=1$, то получим вероятность того, что быстрая частица прореагирует за время своего охлаждения:

$$W = 2n_{\beta}\tau_s \int_0^{v_{0\alpha}} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(u) u^3 du}{u^3 + v_*^3}. \quad (1.41)$$

Последнее выражение позволяет рассчитать коэффициент усиления энергии при торможении быстро реагирующей частицы

в плазме:

$$Q = 1 + (\Delta\varepsilon/\varepsilon_0) W, \quad (1.42)$$

где $\Delta\varepsilon$ — полная энергия, выделяющаяся в реакции; $\varepsilon_0 = m_\alpha v_{0\alpha}/2$ — начальная энергия частицы. Величина Q представляет интерес для ряда практических приложений.

На рис. 9—11 показаны зависимости $Q(\varepsilon_0)$, рассчитанные для реакций $d-t$, $d-d$ и $d-{}^3\text{He}$.

1.5. Функция распределения α -частиц в нестационарной плазме

В стационарной плазме функция распределения α -частиц (1.34) монотонно спадает со скоростью: $f_\alpha \sim v^{-3}$. В то же время ясно, что при мгновенном включении источника функция распределения в начальный момент будет немонотонной ($\partial f/\partial v > 0$). В реальных условиях токамак выходит на режим горения за конечное время, которое может изменяться от десятков миллисекунд в токамаке-игниторе ТСП [22], где для нагрева используется адиабатическое сжатие плазмы, до нескольких секунд в условии полномасштабного реактора. Поскольку положительная производная $\partial f/\partial v$ может приводить к развитию в плазме микронеустойчивостей [1], представляет интерес получить условие на скорость нагрева плазмы [23—25], обеспечивающее монотонность функции распределения α -частиц.

Аппроксимируя источник α -частиц в уравнении (1.31) δ -функцией

$$S^\alpha(v, t) = Q \frac{\delta(v_s^* - v_{0\alpha})}{4\pi v_{0\alpha}^2} \quad (1.43)$$

и следуя работе [25], введем в правую часть (1.31) дополнительное слагаемое f/τ_L , которое феноменологически описывает потери α -частиц из токамака. В результате (1.31) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{\tau_s} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 + v_*^3) f_\alpha - \frac{f_\alpha}{\tau_L} + Q \frac{\delta(v - v_{0\alpha})}{4\pi v_{0\alpha}^2}. \quad (1.44)$$

Предположим, что плотность и температура меняются со временем так, что $\tau_s = \tau_s(t)$, $v_* = v_*(t)$, $Q = Q(t)$ и $\tau_L = \tau_L(t)$. Решение (1.44) будет отличаться от решения уравнения (1.31) тем, что в выражении для фундаментального решения (1.32)

появится дополнительный множитель $\exp\left(-\int_{t_0}^t dt'/\tau_L\right)$. В ре-

зультате с помощью (1.43) и (1.33) получим общее решение уравнения (1.44):

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{Q(t_0) \tau_s(t_0)}{4\pi(v_{0\alpha}^3 + v_*^3(t_0))} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left(\frac{3}{\tau_s(t')} - \frac{1}{\tau_L(t')} \right) dt' \right\}. \quad (1.45)$$

Функция $t_0 = t_0(t, v)$ определяется из решения уравнения

$$v_{0\alpha}^3 = v^3 \exp \left(3 \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\tau_s(t')} + 3 \int_{t_0}^t \frac{v_*^3(t')}{\tau_s(t')} \exp \left(3 \int_{t_0}^{t'} \frac{dt''}{\tau_s(t'')} \right) dt' \right).$$

В частности, в стационарном случае, при постоянных значениях τ_s , v_* , τ_L и Q , выражение (1.45) переходит в

$$f_{\alpha}(v) = \frac{Q\tau_s}{4\pi(v^3 + v_*^3)} \left(\frac{v^3 + v_*^3}{v_{0\alpha}^3 + v_*^3} \right)^{\tau_s/(3\tau_L)}. \quad (1.46)$$

При малых потерях частиц $\tau_L \gg \tau_s$ функция распределения (1.46) совпадает с функцией (1.34). С уменьшением времени жизни τ_L наклон функции распределения уменьшается, и при $\tau_L < \tau_s/3$ она становится нарастающей по скорости $df/dv > 0$.

В общем нестационарном случае условие, при котором $df/dv < 0$, можно получить, дифференцируя функцию распределения (1.45) по скорости:

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial t} - \frac{1}{v_{0\alpha}^3 + v_*^3} \frac{\partial v_*^3}{\partial t} < \frac{3}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_L}. \quad (1.47)$$

Допустим, что в процессе выхода на режим зажигания с помощью дополнительного нагрева плазмы ее температура возрастает со временем. Положим для простоты, что плотность плазмы не меняется ($T_e = AT_i$) и дополнительных потерь α -частиц нет ($\tau_L \rightarrow \infty$). Тогда из (1.47) получим [25]:

$$\left. \frac{dT_i}{dt} \right|_{\max} = \frac{n_e}{A^{3/2}} F_T(T_i, A). \quad (1.48)$$

Основной вклад в $F_T(T_i, A)$ дает первое слагаемое в (1.47), и поэтому функция $F_T(T_i, A)$ слабо зависит от A . На рис. 12 показана зависимость F_T от температуры ионов для двух значений $A = T_e/T_i$ [25]. Там же приведена максимальная скорость изменения температуры для случая реакции между основной дейтериевой плазмой и пучком ионов трития с энергией инжек-

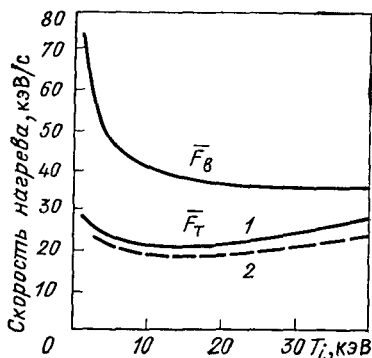


Рис. 12. Зависимость максимальной скорости нагрева от температуры ионов плазмы:

$$\bar{F}_T = A^{3/2} (10^{14} \text{ см}^3/n_e) \left. \frac{dT_i}{dt} \right|_{\max};$$

$$\bar{F}_b = (10^{14} \text{ см}^{-3}/n_e) \left. \frac{dT_e}{dt} \right|_{\max}$$

ции 120 кэВ. В последнем случае

$$\left. \frac{dT_e}{dt} \right|_{\max} = n_e F_b(T_e).$$

Функция распределения α -частиц немонотонна в области выше кривых на рис. 12. Как показывают расчеты, выполненные для всех крупных установок (JET, TFTR, INTOR), их параметры соответствуют нижней области, где $\partial f/\partial v < 0$. Иная ситуация характерна для ТСП-токамака с адиабатическим сжатием плазмы [22], в котором нагрев происходит за очень короткое время. Именно такой случай рассмотрен в [23], где выполнены расчеты функции распределения α -частиц при мгновенном включении источника в начальный момент времени $t=0$. Первая порция α -частиц, родившихся сразу после включения источника, появляется в области $v \approx v_{0\alpha}$ и затем смещается в сторону меньших скоростей, так что стационарная функция распределения (1.34) начинает заполняться со стороны больших энергий. Ширина фронта на функции распределения, который движется в сторону меньших скоростей по мере охлаждения α -частиц, может определяться различными процессами. В [23] учитывалась конечная ширина источника (1.18); $\Delta v \approx v_{Ti}$. Для того чтобы доплеровское уширение определяло ширину фронта, нагрев плазмы должен быть очень быстрым. Действительно, при $\tau_s = \text{const}$ и $v_*/v_{0\alpha} \ll 1$ из (1.45) следует, что $f_\alpha \sim Q(t - \tau_s \ln(v_{0\alpha}/v))$, откуда

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{Q}{Q'} \frac{1}{\tau_s} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\tau_s},$$

где Δt — время нарастания температуры (считалось, что $Q \sim T^2$). Даже в условиях ТСП последняя величина существенно превышает доплеровское уширение.

УДЕРЖАНИЕ α -ЧАСТИЦ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ТОКАМАКЕ

2.1. (R, Z, ψ) -представление для дрейфовых поверхностей

Приближение однородной плазмы, рассмотренное выше, довольно грубо для реального токамака, поскольку при большой энергии, характерной для термоядерных частиц, их радиальные экскурсии в плазме сравнимы с размерами шнура. Например, в условиях реактора-токамака INTOR [26] ларморовский радиус частиц с энергией 3,52 МэВ составляет примерно $1/20$ малого радиуса плазмы, а дрейфовое отклонение траектории от магнитной поверхности, которое в $q/\sqrt{\epsilon}$ раз превышает ларморовский радиус, составляет $1/4-1/5$ радиуса. В установках меньшего масштаба радиальные экскурсии частиц могут быть сравнимы с размерами шнура.

В этой главе рассмотрены эффекты, связанные с конечными размерами дрейфовых орбит в аксиально-симметричном магнитном поле токамака.

Для описания движения энергичных термоядерных частиц в токамаке, как правило, можно использовать дрейфовое приближение, точность которого определяется малым параметром $\rho_L/R \ll 1$, где ρ_L — ларморовский радиус частицы; R — большой радиус тора, равный характерному масштабу изменения магнитного поля. Уравнение движения ведущего центра выглядит следующим образом [27]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = & v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{mc(2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)}{2eB^3} [\mathbf{B} \times \nabla B] + \\ & + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{mcv_{\parallel}^2}{eB^4} [[\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}] \times \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{B} — магнитная индукция; \mathbf{E} — напряженность электрического поля; $v_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})/B$ — продольный компонент скорости частицы, который можно выразить через координаты ведущего центра \mathbf{r} , используя законы сохранения энергии

$$mv^2/2 + e\varphi_E = \varepsilon_0 = \text{const} \quad (2.2)$$

и магнитного момента

$$v_{\perp}^2/B = \mu = \text{const}, \quad (2.3)$$

где φ_E — потенциал электрического поля. Если продольную скорость v_{\parallel} выразить с помощью (2.2) и (2.3) в виде функций

координат ведущего центра, то уравнение (2.1) можно привести к более удобному виду [27]:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{B} \left(1 - \frac{mc v_{\parallel}}{e B^3} (\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}) \right) \left\{ \mathbf{B} + \frac{mc}{e} \operatorname{rot} \frac{v_{\parallel} \mathbf{B}}{B} \right\}. \quad (2.4)$$

Для магнитного поля токамака второе слагаемое в круглых скобках мало [$\sim \rho_{\pi}/(Rq)$, где q — запас устойчивости], поэтому в дальнейшем им будем пренебрегать. В результате получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{B} \left\{ \mathbf{B} + \frac{mc}{e} \operatorname{rot} \frac{v_{\parallel} \mathbf{B}}{B} \right\}. \quad (2.5)$$

Воспользуемся теперь наиболее общим выражением для аксиально-симметричного магнитного поля токамака

$$\mathbf{B} = B_{\tau} R \nabla \varphi + (1/2\pi) [\nabla \varphi \times \nabla \Psi]. \quad (2.6)$$

Здесь B_{τ} — магнитная индукция тороидального поля; $\Psi = \Psi(R, z)$ — поток полоидального магнитного поля \mathbf{B}_p ; R, z и φ — координаты в цилиндрической системе координат с осью, совпадающей с осью тора. Для определенности положим, что на магнитной оси $\Psi = 0$.

В токамаке тороидальное поле $B_{\tau} = B_0 f(\Psi) R_0/R$ (B_0 — поле на магнитной оси с радиусом R_0) примерно на порядок превышает полоидальное $B_{\tau} \simeq B_p R q/a$ и поэтому в (2.5) можно считать, что $|B| = (B_{\tau}^2 + B_p^2)^{1/2} \simeq B_{\tau} [1 + (1/2) B_p^2/B_{\tau}^2] \simeq B_{\tau}$. Тогда, проецируя уравнение (2.5) на меридиональную плоскость ($\varphi = \text{const}$), получаем выражение для полоидального компонента скорости частицы

$$\mathbf{v}_p = \frac{v_{\parallel} c}{e B_{\tau}} \left[\nabla \varphi \times \nabla \left\{ -m v_{\parallel} R + \frac{e \Psi}{2\pi c} \right\} \right]. \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что в аксиально-симметричном поле (2.6) дрейфовые траектории частиц лежат на дрейфовых поверхностях:

$$m v_{\parallel} R - e \Psi(R, z)/(2\pi c) = \text{const}. \quad (2.8)$$

Это уравнение является следствием сохранения обобщенного момента импульса в аксиально-симметричном магнитном поле токамака.

Обычно при исследовании дрейфовых траекторий частиц в токамаке предполагают малое отклонение частиц от магнитной поверхности. В случае энергичных термоядерных частиц такое приближение, вообще говоря, неприменимо. Поэтому воспользуемся (R, z, Ψ)-представлением дрейфовых поверхностей [28]. Прежде всего пренебрежем электрическим полем, потенциал которого в токамаке по порядку равен электронной температуре T_e , и поэтому электрическое поле дает малые поправки T_e/ϵ_0 к скорости магнитного дрейфа энергичных частиц. Обозначим

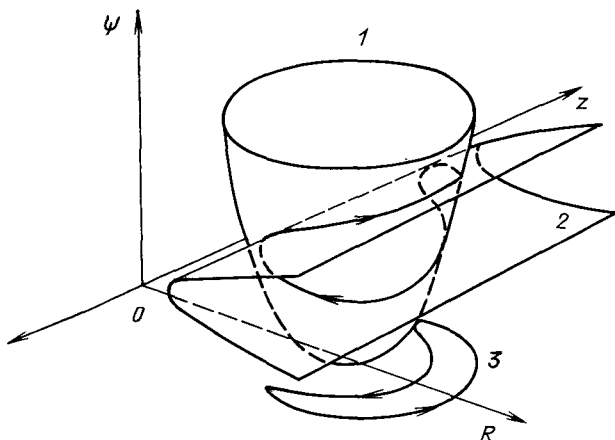


Рис. 13. Траектория представляет собой линию пересечения двух поверхностей:

1 — поверхность (2.11); 2 — $\psi(R, z) = \text{const}$; 3 — проекция траекторий на плоскость R, z

$\chi = v_{\parallel}/v$, $\psi = e\Psi(R, z)/(2\pi mc)$, $v = \mu B_0 R_0/v^2$ и перепишем уравнения (2.3) и (2.8) в виде

$$-v\chi R + \psi(R, z) = p; \quad (2.9)$$

$$(1 - \chi^2)R/f(\psi) = v, \quad (2.10)$$

где p и v — интегралы движения, которые однозначно задают дрейфовую траекторию частицы. Исключая из (2.9) и (2.10) χ , получаем

$$R^2 - v^2 f(\psi) R - (\psi - p)^2 / v^2 = 0. \quad (2.11)$$

Зависимость ψ от координат R, z задается распределением плазменного тока, давления плазмы и внешних полоидальных полей:

$$\psi = \psi(R, z). \quad (2.12)$$

Рассмотрим трехмерное пространство R, z, ψ , в котором уравнения (2.11) и (2.12) задают две поверхности, причем поверхность (2.11) — это цилиндрическая поверхность с образующей параллельной оси z (рис. 13). Магнитным поверхностям, в том числе границе плазмы, соответствуют линии уровня $\psi = \text{const}$ на плоскости R, z . В пространстве R, z, ψ траектория частицы представляет собой линию пересечения поверхностей (2.11) и (2.12).

Традиционному представлению траекторий соответствует проекция трехмерных кривых на плоскость R и z . Одна из таких траекторий показана на рис. 13. Аналитически такое про-

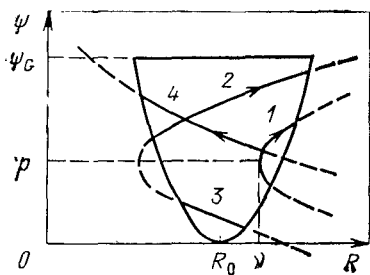


Рис. 14. Граница плазмы и проекция траекторий на плоскости ψ, R :

1 — запертая частица; 2—4 — пролетные частицы

значение β обычно невелико ($\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$), то можно считать, что тороидальное магнитное поле в плазме равно вакуумному полю, создаваемому тороидальными катушками. При этом $f(\psi) = 1$, а уравнение (2.11) сводится к уравнению гипербол на плоскости R, ψ . Константы ν и p задают координаты вершины гиперболы, в которой продольная скорость частицы обращается в нуль (точка отражения): $\chi = (\psi - p)/(R\nu) = 0$. Если вершина гиперболы попадает в область, занятую плазмой, то такая траектория соответствует запертой (банановой) частице, имеющей точку отражения. При уменьшении ν траектория смещается влево и распадается на две траектории пролетных частиц (траектории 2 и 3 на рис. 14). Частицам, уходящим из плазмы, при движении по дрейфовым траекториям соответствуют траектории, пересекающие границу плазмы $\psi = \psi_G$. Направление движения частицы на рис. 13 и 14 показано стрелками. Оно изменяется на противоположное при изменении направления тороидального дрейфа (тороидального магнитного поля). На рис. 13 тороидальный дрейф направлен в сторону, противоположную направлению оси z . Если стенка, окружающая плазменный шнур, симметрична относительно экваториальной плоскости тора, то, как легко видеть из рис. 13, частицы, покидающие плазму по дрейфовым траекториям, выходят только на одну половину стенки — на ту, в сторону которой направлен тороидальный дрейф.

Можно показать, что рассмотренное выше представление применимо и в общем случае $\phi_E \neq 0$ и $f(\psi) \neq 1$. Использование переменных R, z, ψ позволяет наглядно представить себе семейство дрейфовых поверхностей и для более сложных типов равновесий, в частности, с несколькими магнитными осями. На рис. 15 для примера показаны дрейфовые поверхности для кон-

ектирование можно выполнить только при малой энергии частиц. Однако можно использовать и более удобные проекции. Например, в случае магнитных конфигураций, симметричных относительно экваториальной плоскости тора, $\psi(R, z) = \psi(R, -z)$, достаточно ограничиться половиной траектории ($z > 0$), проецируя ее на плоскость ψ, R . Такие координаты использовались в [29—32]. Траектории частиц и граница плазмы в переменных ψ, R показаны на рис. 14.

Если учесть, что в токамаке

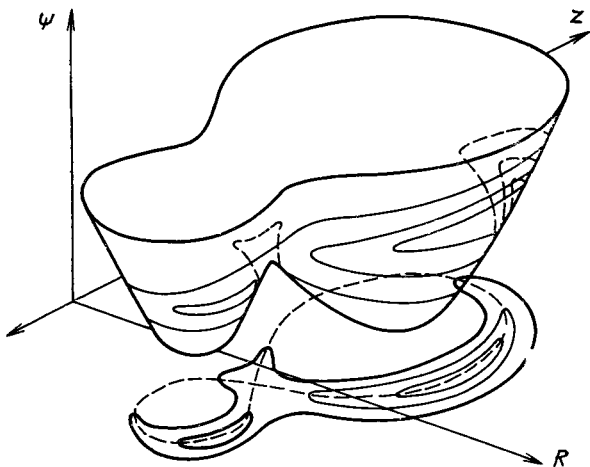


Рис. 15. Траектории частиц для магнитной конфигурации с двумя магнитными осями (пунктир — сепаратриса)

фигурации типа «Дублет» с двумя магнитными осями. Показанные траектории соответствуют $p = \text{const}$ и различным значениям v .

2.2. Потери частиц, рожденных на магнитной оси

Обычно дрейфовые потери рассчитывают для термоядерного реактора с целью определить коэффициент удержания α -частиц K_α , т. е. долю удерживаемых в плазме от всех родившихся α -частиц. Однако ясно, что коэффициент удержания частиц зависит не только от магнитных полей токамака, но и от распределения источника термоядерных частиц по сечению плазменного шнура, от формы сечения, положения стенки и ограничивающих диафрагм. Поэтому, прежде чем привести результаты расчетов коэффициентов удержания α -частиц, имеет смысл выполнить грубые оценки для величины K_α .

Рассмотрим α -частицы, рождающиеся на магнитной оси ($\psi = 0$) [33], там, где максимальна скорость их рождения. Семейство траекторий, проходящих через магнитную ось, показано на рис. 16. Для таких траекторий константы p и v в формулах (2.9) и (2.10) можно выразить с помощью χ_0 — значения χ в момент рождения частицы:

$$p = -vR_0\chi_0; \quad v = R_0(1 - \chi_0^2). \quad (2.13)$$

Рассмотрим для простоты плазму с круглыми концентрическими магнитными поверхностями с однородным распределением

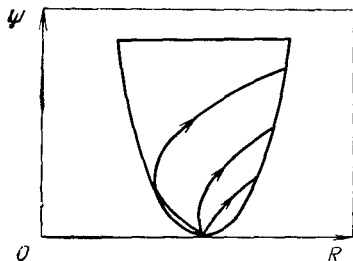


Рис. 16. Траектории частиц, проходящих через магнитную ось

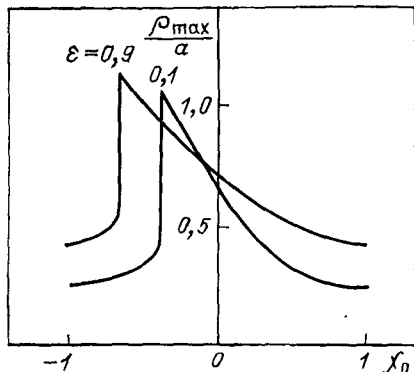


Рис. 17. Зависимость максимального отклонения частиц, рожденных на оси, от χ_0

плазменного тока $j = \text{const}$. Тогда $\psi(R, z) = \psi_G \rho^2 / a^2$, где ρ — расстояние от магнитной оси, ψ_G — значение ψ на границе плазмы $\rho = a$. Подставляя это выражение в уравнение для дрейфовой траектории (2.11), получаем уравнение для координаты пересечения траекторией экваториальной плоскости тора

$$\varepsilon(1 + \chi^2_0) = \beta^2 (\rho/a)^3 + (2\beta\chi_0 - \varepsilon^2)\rho/a. \quad (2.14)$$

Здесь $\varepsilon = a/R_0$, $\beta = \psi_G / (R_0 v)$. Как видно из рис. 16, максимальное отклонение от оси имеют частицы, траектория которых соответствует сепаратрисе между запертыми и пролетными частицами. Легко показать, что при $\beta > \varepsilon^2$ на сепаратрисе $\chi_0 \approx \approx -1,5(\varepsilon/2\beta^{1/2})^{2/3}$, а ширина траектории $\rho/a \approx (4\varepsilon/\beta^2)^{1/3}$. Частицы, рожденные на оси шнура, удерживаются, если $\beta^2 > 4\varepsilon$. Выражая ψ_G через плазменный ток J_p , получаем условие полного удержания приосевых α -частиц [34]:

$$e\alpha J_p / (2m_\alpha c^2 v_\alpha \varepsilon^{1/2}) > 1, \quad (2.15)$$

откуда видно, что удержание α -частиц зависит в основном от полного плазменного тока. Подставляя параметры термоядерных α -частиц, получаем выражение для критического тока (МА):

$$J_{pk} = 5,4\varepsilon^{1/2}. \quad (2.16)$$

Равенство (2.16) дает масштаб токов, необходимых для хорошего удержания α -частиц.

На рис. 17 показана зависимость ρ/a от χ_0 , полученная из уравнения (2.14) при $\beta^2 = 4\varepsilon$ ($J_p = J_{pk}$). Видно, что отклонение частиц от оси довольно сильно изменяется с χ_0 . Поэтому даже при токах, меньших критического, коэффициент удержания может оказаться достаточно большим.

В случае эллиптических магнитных поверхностей формула (2.16) для критического тока была обобщена в [35]:

$$J_{pk} = 5,4\epsilon^{1/2}(k^2 + 1) / (2k), \quad (2.17)$$

где k — отношение полуосей магнитных поверхностей. Как видно из последнего выражения, вытягивание поперечного сечения приводит к ухудшению удержания α -частиц. Если при вытягивании сечения фиксировать значение запаса устойчивости q , то вытягивание будет сопровождаться ростом плазменного тока $J_p \sim 1 + k^2$, так что в результате удержание α -частиц будет улучшаться.

Перейдем теперь к результатам расчетов прямых дрейфовых потерь α -частиц в токамаке, которые подробно изучены в [34—38].

2.3. Дрейфовое кинетическое уравнение для α -частиц

Дрейфовые потоки α -частиц на стенку получим с помощью дрейфового кинетического уравнения [39]:

$$\partial f_\alpha / \partial t + \mathbf{V}_{др} \nabla f_\alpha = St(f_\alpha) + \bar{S}^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}), \quad (2.18)$$

где $St(f_\alpha)$ — интеграл столкновений; $\bar{S}^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ — источник α -частиц. Скорость дрейфа $\mathbf{V}_{др}$ определяется уравнением (2.4). Следует отметить, что в дрейфовом приближении \bar{S}^α представляет собой источник частиц (1.16), усредненный по фазе φ лармовского вращения частиц:

$$\bar{S}^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S^\alpha \left(\mathbf{v}, \mathbf{r} + \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{B\omega_i} \right) d\varphi.$$

В частности, из-за такого усреднения источник частиц в (2.18) теряет изотропность. В дальнейшем знак усреднения в обозначениях источника будем опускать.

В интеграле столкновений учтем торможение α -частиц на ионах и электронах плазмы и угловое рассеяние частиц:

$$St(f_\alpha) = \frac{1}{\tau_s} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v_*^3 + v^3) f_\alpha + D(v) \frac{\partial}{\partial \chi} (1 - \chi^2) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \chi} \right\}.$$

В случае классических парных столкновений из формулы (1.30) следует, что

$$D(v) = \frac{1}{2} \frac{m_i}{m_\alpha} \frac{v_*^3}{v^3}.$$

Однако в токамаке возможно и аномальное рассеяние α -частиц, пример которого рассмотрен ниже. Поэтому сейчас не будем конкретизировать выражение для $D(v)$. Функция распределения f_α в дрейфовом приближении — это усредненная по фазе

Быстрого ларморовского вращения функция распределения α -частиц. Поэтому $f_\alpha = f_\alpha(\mu, \varepsilon, R, z)$. В дальнейшем вместо магнитного момента μ и энергии частицы ε будем использовать введенную выше константу ν и полную скорость α -частицы v .

Если рассматривать константу p , входящую в (2.9), как функцию координат, то выражение для $V_{др}$ (2.7) можно записать в виде

$$V_{др} = \frac{\chi v R}{\omega_{i0} R_0} [\nabla \varphi \times \nabla p], \quad (2.19)$$

где $\omega_{i0} = e_\alpha B_0 / (m_\alpha c)$ — циклотронная частота α -частиц на магнитной оси. С помощью (2.19) левую часть уравнения (2.18) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\chi v}{\omega_{i0} R_0} \left\{ \frac{\partial p}{\partial R} \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial f_\alpha}{\partial R} \right\} = \text{St}(f_\alpha) + S^\alpha. \quad (2.20)$$

Рассмотрим магнитную конфигурацию, симметричную относительно экваториальной плоскости тора, для которой можно использовать (R, ψ) -представление для дрейфовых траекторий. Перейдем в уравнении (2.20) от переменных t, R, z, v, χ к новым независимым переменным t, ψ, p, v, ν :

$$-\frac{v^2(1 + \chi^2)}{2\omega_{i0} R_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \psi} = -\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \text{St}(f_\alpha) + S^\alpha. \quad (2.21)$$

В новых переменных интеграл столкновений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{St}(f_\alpha) = & \frac{1}{\tau_s} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 + v_*^3) f_\alpha + (\psi - p) \left(2D - 1 - \frac{v_*^3}{v^3} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial p} + \right. \\ & + 2 \left[\left(v^2 + \frac{4}{v^2} (\psi - p)^2 \right)^{1/2} - 2\nu \right] D \frac{\partial f_\alpha}{\partial \nu} + 4D\nu (\psi - p) \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial p} + \\ & + \frac{Dv^2\nu}{2} \left\{ \left(v^2 + \frac{4(\psi - p)^2}{v^2} \right)^{1/2} + \nu \right\} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \\ & \left. + \frac{8D\nu(\psi - p)^2}{v^2 \{ (v^2 + (4/v^2)(\psi - p)^2)^{1/2} + \nu \}} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right\}. \quad (2.22) \end{aligned}$$

В пространстве переменных p, ν, v можно выделить две различные области, первая из которых — это область прямых потерь, соответствующая дрейфовым траекториям, пересекающим границу плазмы и выходящим на стенку. Во второй области траектории целиком лежат внутри плазмы и из нее частицы могут выходить на стенку за счет рассеяния и вследствие пространственной диффузии. Такая диффундирующая частица выходит на стенку тогда, когда она попадает на границу между первой и второй областями.

2.4. Прямые дрейфовые потери α -частиц

Рассмотрим область прямых дрейфовых потерь. В области прямых потерь время жизни α -частиц определяется временем движения по траектории $\tau_b \simeq 2\pi qR/v$, которое гораздо меньше времени кулоновского взаимодействия с плазмой τ_s . В условиях реактора-токамака $\tau_b/\tau_s \simeq 10^{-5}$. Поэтому в области прямых дрейфовых потерь торможением и рассеянием частиц можно пренебречь и оставить в правой части уравнения (2.21) только источник частиц:

$$-\frac{v^2(1+\chi^2)}{2\omega_{i0}R_0} \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial f_\alpha}{\partial\psi} = S^\alpha. \quad (2.23)$$

Если тороидальный дрейф направлен вниз, то на верхней половине стенки $\psi = \psi_G$, $z > 0$ и функция распределения равна нулю: $f_\alpha = 0$. Значение функции f_α на нижней половине стенки, куда выходят α -частицы, определяется интегрированием (2.23) вдоль всей траектории:

$$f_\alpha|_G = \frac{4\omega_{i0}R_0}{v^2} \int_{\psi_{\min}}^{\psi_G} \frac{S^\alpha d\psi}{\left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right| (1+\chi^2)}. \quad (2.24)$$

Здесь ψ_{\min} — минимальное значение ψ на траектории частицы, которое достигается при пересечении частицей экваториальной плоскости тора. В правой части переменные χ и R должны быть выражены через ψ с помощью соотношения (2.11). Так как в токамаке плотность и температура плазмы являются функциями магнитных поверхностей $n = n(\psi)$, $T = T(\psi)$, то и источник частиц будет функцией магнитных поверхностей:

$$S^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = S^\alpha(\psi, \mathbf{v}). \quad (2.25)$$

Выражение (2.24) позволяет получить плотность потока α -частиц на стенку Φ :

$$\begin{aligned} d\Phi &= 2\pi f_\alpha|_G (\mathbf{v} ds) d\chi_G v^2 dv = \\ &= 2\pi f_\alpha|_G v_{дрz} R_G dR_G d\varphi_G d\chi_G v^2 dv. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь R_G , φ_G — координаты выхода дрейфовой траектории на стенку; χ_G — косинус питч-угла в момент выхода частицы. Подставляя выражение (2.24) в уравнение (2.26), с учетом (2.25) получаем

$$d\Phi = 2I v dp dv d\varphi_G dv, \quad (2.27)$$

где

$$I = \iint \frac{2\pi S^\alpha}{\left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right|} \delta \left(R^2 - Rv - \frac{(\psi - p)^2}{v^2} \right) R dR d\psi. \quad (2.28)$$

В выражении (2.27) мы перешли от переменных R_G, χ_G к ρ и ν с помощью соотношений (2.9) и (2.10). Отметим, что $|\partial\psi/\partial z| = = Re_\alpha B_R / (m_\alpha c)$, где B_R — радиальный компонент полоидально-го магнитного поля, и поэтому (2.28) можно записать в виде

$$I = \frac{2\pi m_\alpha c}{e_\alpha} \iint \frac{S^\alpha(\psi, \nu)}{B_R(\psi, R)} \delta\left(R^2 - R\nu - \frac{(\psi - \rho)^2}{\nu^2}\right) dR d\psi. \quad (2.29)$$

Интегрирование в (2.28) и (2.29) проводится по всей половине сечения плазменного шнура ($z > 0$). В случае пролетных частиц одним и тем же значениям ρ и ν соответствуют две пролетные траектории (2 и 3 на рис. 14). Для того чтобы исключить траекторию 3, которая не выходит на стенку, в случае пролетных частиц в качестве нижнего предела интегрирования по ψ в (2.28) и (2.29) нужно выбрать значение ρ . Таким образом, формулы (2.27) и (2.29) описывают распределение дрейфовых потоков по поверхности стенки.

Для того чтобы получить коэффициент удержания α -частиц, нужно проинтегрировать (2.27) по поверхности стенки и по скорости ν . В результате будем иметь полный поток α -частиц на поверхность стенки S_- , который позволяет определить коэффициент удержания

$$K_\alpha = 1 - S_- / \iint S^\alpha d^3 r d^3 \nu. \quad (2.30)$$

Для того чтобы вычислить интегральный поток S_- , можно воспользоваться следующими простыми рассуждениями. Как видно из рис. 17, за границу плазмы в первую очередь выходят частицы в некотором интервале питч-углов $\Delta\chi$, которым соответствует наибольшее отклонение дрейфовой траектории. Таким образом, каждой пространственной точке соответствует некоторый конус потерь α -частиц, из которого частицы уходят на стенку. Если пренебречь анизотропией источника, связанной с конечным ларморовским радиусом, и учесть, что термоядерные частицы рождаются примерно с одной и той же энергией

$$S^\alpha = \frac{n_\gamma n_\beta \gamma}{4\pi v_{0\alpha}^2} \delta(v - v_{0\alpha}),$$

то выражение (2.30) можно переписать в виде

$$K_\alpha = 1 - \int \gamma n_\gamma n_\beta \Delta\chi d^3 x / \left(2 \int n_\gamma n_\beta \gamma d^3 x\right), \quad (2.31)$$

где $\Delta\chi$ — ширина конуса потерь $\Delta\chi = \chi_{\max} - \chi_{\min}$.

Оценим коэффициент удержания K_α при больших значениях тока плазмы $J_p > J_{pk}$. В этом случае ширина орбиты α -частицы $\Delta\rho$, которая пропорциональна J_{pk}/J_p , составляет малую часть радиуса шнура $\Delta\rho \ll a$. Поэтому на стенку выходят частицы, рожденные в узкой периферийной зоне шириной $\sim \Delta\rho$, причем

поскольку максимальное отклонение от точки рождения имеют запертые частицы, то для оценок в (2.31) можно положить $\Delta\chi \simeq \varepsilon^{1/2}$. Тогда

$$1 - K_\alpha \sim \varepsilon^{1/2} \int_{a-\Delta\rho}^a \gamma n^2 \rho^l \rho / \int_0^a \gamma n^2 \rho^l \rho. \quad (2.32)$$

Если задаться степенной зависимостью распределения источника по радиусу шнура $n^2 \langle \sigma v \rangle \sim (1 - (\rho/a)^2)^l$, то из последнего выражения следует

$$1 - K_\alpha \sim \varepsilon^{1/2} (\Delta\rho)^{l+1} \sim \varepsilon^{1/2} (J_{pk}/J_p)^{l+1}.$$

Таким образом,

$$K_\alpha = 1 - C \varepsilon^{1/2} (J_{pk}/J_p)^{l+1}, \quad (2.33)$$

где C — константа, которая может быть определена из более точных расчетов [35]. Например, при $T = 10 \div 20$ кэВ скорость реакций $\gamma \sim T^2$, и поэтому при параболических распределениях температуры и плотности плазмы $l = 4$. Тогда, воспользовавшись результатами [35], где найдено, что при $l = 4$ $C = 0,068$, получим

$$K_\alpha \simeq 1 - 0,068 \varepsilon^{1/2} (J_{pk}/J_p)^5. \quad (2.34)$$

Видно, что даже при $J_p = J_{pk}$ доля теряемых из плазмы α -частиц мала и коэффициент удержания близок к единице.

Таким образом, для энергобаланса плазмы прямые дрейфовые потери α -частиц важны только при малых значениях плазменного тока, характерных для токамаков-игниторов небольшого масштаба. В этом случае ($J_p < J_{pk}$) асимптотическая формула (2.33) начинает давать большую погрешность, а само значение коэффициента удержания оказывается чувствительным к положению и форме первой стенки. На рис. 18 показана зависимость коэффициента удержания K_α от плазменного тока для двух различных расположений стенки. Кривой 1 на рис. 18 соответствует стенка, расположенная на границе плазмы, кривой 2 — вакуумная камера токамака ТСП [22], которая позволяет осуществлять адиабатическое сжатие плазменного шнура по большому радиусу. Пунктиром показана асимптотическая зависимость (2.33). Видно, что при малых значениях тока плазмы удаление камеры от границы плазмы позволяет существенно увеличить коэффициент удержания α -частиц K_α . В результате в ТСП при токе 1,2 МА коэффициент удержания составляет 70—80%.

Обратимся теперь к поперечному распределению прямых дрейфовых потоков по поверхности стенки термоядерного реактора, которое описывается формулами (2.27), (2.28) и представляет интерес с точки зрения тепловых и радиационных нагрузок. Подробные численные расчеты распределения пря-

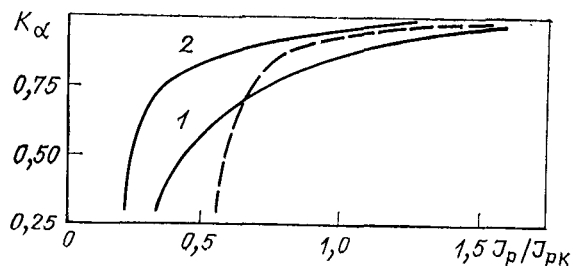


Рис. 18. Зависимость коэффициента удержания K_α от тока плазмы J_p/J_{pk} при малых токах

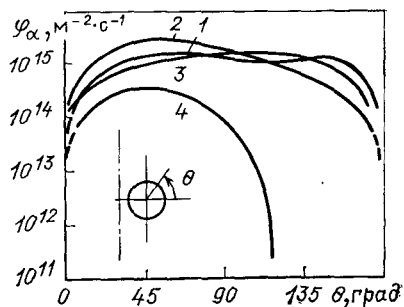
мых дрейфовых потоков можно найти в [41]. В [35] получена аппроксимационная формула для распределения потока частиц по полоидальному углу θ в случае эллиптического сечения плазменного шнура. Максимум плотности потока частиц достигается при $\theta \ll \pi/2$, причем, как показано в [41], отношение максимального потока к среднему $\Phi_{\max}/\bar{\Phi}$ при $J \gg J_{pk}$ слабо чувствительно к изменению параметров и лежит в пределах 1,5—2,5. На рис. 19 для иллюстрации показаны распределения потоков термоядерных α -частиц для четырех токамаков: PLT, TFTR, ORNL-EPR и UWMAK-1 [41]. Два последних представляют собой проекты реакторов. Параметры этих токамаков сведены в табл. 4. Что касается абсолютного значения потока частиц $\bar{\Phi}$, то оно оказывается, вообще говоря, чувствительным к профилям температуры и плотности плазмы. Это связано с тем, что при больших токах плазмы, характерных для реактора ($J_p \gg$

Таблица 4. Параметры токамаков

Параметр	2 TFTR	2 ORNL-EPR	3 PLT	4 UWMAK-1
B , Тл	5,2	4,8	4,6	3,82
J_p , МА	2,5	7,2	1	21
R_0 , м	2,48	6,75	1,32	13
a , м	0,85	2,25	0,45	5
r_w , м	1,1	2,25	0,48	5,5
T_{i0} , кэВ	10	22,5	5	11,1
T_i/T_{i0}	$1 - 0,8r^2/a^2$	$1 - r^2/a^2$	$1 - 0,8r^2/a^2$	1
n_{i0} , см $^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{14}$	$8 \cdot 10^{13}$	10^{14}	$1,2 \cdot 10^{14}$
n_i/n_{i0}	$1 - r^2/a^2$	$(1 - r^2/a^2)^{1/2}$	$1 - r^2/a^2$	$(1 - 0,99r^2/a^2)^{1/2}$
j/j_0	$1 - r^2/a^2$	$1 - r^2/a^2$	$1 - r^2/a^2$	1
q	3,03	2,5	3,53	1,75
$1 - K_\alpha$	0,014	$3,1 \cdot 10^{-3}$	0,48	$1,4 \cdot 10^{-4}$
$\Phi_{\max}/\bar{\Phi}$	1,4	1,8	1,4	2,3
$\bar{\Phi}$, м $^{-2} \cdot c^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{15}$	$1,5 \cdot 10^{15}$	$1,1 \cdot 10^{15}$	$1,6 \cdot 10^{14}$

Примечание. r_w —радиус стенки; T_{i0} —температура в центре плазменного шнура; n_{i0} —плотность ионов в центре плазменного шнура.

Рис. 19. Зависимости плотности потока α -частиц φ_α от полоидального угла θ [38]



$\gg J_{pk}$), на стенку выходят α -частицы, рожденные на краю плазменного шнура, где температура плазмы невелика и где скорость реакций сильно зависит от температуры.

2.5. Распределение потока α -частиц по углам падения на стенку

Для исследования процессов повреждения первой стенки и, в частности, явления блистеринга поверхности под действием α -частиц необходимо знать распределение потока частиц по углам падения на стенку. При известном дрейфовом потоке α -частиц такое распределение легко найти, рассматривая движение частицы вблизи стенки [37, 42, 43]. Обратимся к рис. 20, на котором изображена траектория частицы вблизи стенки. Будем считать, что магнитное поле параллельно поверхности стенки, а скорость дрейфа направлена под углом γ к нормали к стенке. Тогда для нормального компонента скорости частицы можно записать

$$v_y = V_{др} \cos \gamma + v_\perp \sin \beta. \quad (2.35)$$

Угол β можно связать с фазой частицы α в тот момент, когда ларморовская окружность коснется стенки в точке А. Действительно, расстояние $00'$, на которое сместится ларморовский центр, равно

$$00' = \frac{2\pi - \alpha - \beta}{\omega_i} V_{др}.$$

Учитывая, что $0_1 B = r_L$, получаем уравнение, связывающее α и β :

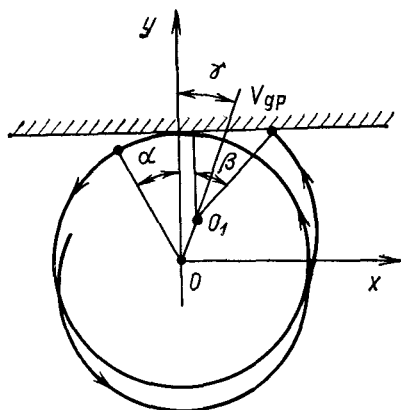
$$1 - \frac{(2\pi - \beta - \alpha)}{\omega_i r_L} V_{др} \cos \gamma = \cos \beta. \quad (2.36)$$

В свою очередь, с помощью соотношения (2.35) угол β можно связать с углом скольжения ξ при падении частицы на стенку:

$$\sin \xi = (v_y/v) = (v_{др}/v) \cos \gamma + \sqrt{1 - \chi_G^2} \sin \beta, \quad (2.37)$$

где $\chi_G = v_\parallel/v$ — значение χ в момент падения на стенку. Для того чтобы найти распределение потока по углам скольжения,

Рис. 20. Траектория частицы вблизи стенки



учтем, что распределение частиц по углам ларморовского вращения α равномерное:

$$dN = (\Phi/2\pi) d\alpha. \quad (2.38)$$

Здесь dN — число частиц, имеющих фазу ларморовского вращения α ; Φ — поток дрейфовых центров, выходящих в данную точку на камере. Переходя в (2.38) от α к β , затем к ξ , получаем

$$dN = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{v}{V_{др} \cos \gamma} \frac{\sin \xi \cos \xi d\xi}{\sqrt{1 - \chi_G^2 - [\sin \xi - (V_{др}/v) \cos \gamma]^2}}. \quad (2.39)$$

В (2.39) значение ξ лежит в конечном интервале $0 \leq \xi \leq \xi_{\max}$, а значение ξ_{\max} можно определить из (2.36) и (2.37), полагая в (2.36) $\alpha = 0$. При $\xi > \xi_{\max}$ вместо (2.39) имеем $dN = 0$.

Выражение (2.39) можно упростить, учитывая, что дрейфовое смещение ларморовской окружности за один оборот мало ($2\pi V_{др}/(\omega_i \rho_L) \ll 1$). При этом

$$\beta_{\max} \approx \left\{ \frac{4\pi V_{др}}{\omega_i \rho_L} \cos \gamma \right\}^{1/2} \ll 1;$$

$$\xi_{\max} \approx \frac{V_{др}}{v} \cos \gamma + \left\{ \frac{4\pi V_{др}}{v} \sqrt{1 - \chi_G^2} \cos \gamma \right\}^{1/2} \ll 1,$$

и выражение (2.39) переходит в

$$dN = \begin{cases} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{v}{V_{др} \cos \gamma} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \chi_G^2 - [\xi - (V_{др}/v) \cos \gamma]^2}}; & \xi \leq \xi_{\max}; \\ 0; & \xi > \xi_{\max}. \end{cases} \quad (2.40)$$

Практически для всех падающих частиц выполняется неравенство $1 - \chi_G^2 > \left(\frac{4\pi V_{др}}{v} \cos \gamma \right)$, и поэтому (2.40) можно записать в виде

$$\frac{dN}{d\xi} = \begin{cases} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{v\xi}{V_{др} \cos \gamma \sqrt{1 - \chi_G^2}}; & \xi \leq \xi_{\max}; \\ 0; & \xi > \xi_{\max}, \end{cases} \quad (2.41)$$

где $\xi_{\max} = \left\{ \frac{4\pi V_{\text{др}}}{v} \sqrt{1 - \chi_G^2} \cos \gamma \right\}^{1/2}$. Например, для частиц, выходящих на стенку при $\gamma=0$ (над магнитной осью $\theta=\pi/2$) с $\chi_G=0$, $\xi_{\max} \simeq \{4\pi V_{\text{др}}/v\}^{1/2} \simeq \{4\pi \rho_{\text{пл}}/R\}^{1/2}$. Для типичных параметров реактора-токамака $\rho_{\text{пл}}/a=1/20$, $a/R=0,25$ это дает $\xi_{\max} \simeq 23^\circ$.

2.6. Обратная задача для прямых дрейфовых потерь термоядерных частиц

При не слишком больших токах плазмы ($J_p \lesssim J_{\text{рн}}$) заряженные термоядерные частицы выходят из всего объема плазменного шнура, включая окрестность магнитной оси. Это позволяет использовать дрейфовые потоки частиц для пассивной диагностики плазмы [31, 32, 44—49]. Выясним, какую информацию о параметрах плазмы можно получить, измеряя распределения потоков и энергетические спектры уходящих α -частиц.

Родившуюся в плазме α -частицу ожидают два возможных исхода. Если дрейфовая траектория частицы пересекает стенку, то частица, не успев испытать кулоновских столкновений ($\tau_s \gg \gg \tau_b$), вылетает на стенку с той же энергией, которую она получила при рождении. В случае классического взаимодействия с плазмой рассеяние оставшихся в плазме частиц мало. Поэтому в процессе охлаждения отклонения дрейфовых траекторий α -частиц уменьшаются, и энергичная частица сможет выйти на стенку лишь при энергии $\epsilon \simeq \epsilon_* \ll \epsilon_{0\alpha}$, когда «включится» рассеяние на ионах плазмы. Таким образом, энергетический спектр выходящих на стенку термоядерных частиц будет состоять из узкого пика в окрестности $\epsilon = \epsilon_{0\alpha}$ и низкоэнергетического хвоста с $\epsilon \lesssim \epsilon_* \simeq 20T_e^*$. Энергетический спектр может измениться, если термоядерные частицы будут испытывать аномальное рассеяние, связанное, например, с развитием кинетических термоядерных неустойчивостей. Для того чтобы частицы с энергией $\epsilon_* < \epsilon < \epsilon_{0\alpha}$ могли попасть на стенку, коэффициент аномальной диффузии D_A должен превышать a^2/τ_s . При реакторных параметрах ($a=10^2$ см, $T=10$ кэВ, $n=10^{14}$ см $^{-3}$) это составляет $D_A > 10^5$ см 2 /с.

Таким образом, термоядерные частицы, выходящие на стенку за счет прямых потерь, выносят энергетический спектр источника, который описывается формулами (1.19) и (2.27), (2.28). Если на поверхности стенки расположен коллимированный детектор термоядерных частиц, имеющий энергетическое разрешение, то он регистрирует частицы, приходящие на стенку с определенными значениями χ_0 , v и R , соответствующие вполне определенной траектории. Разброс по скорости родив-

* Небольшое количество α -частиц будет появляться в области $\epsilon_* < \epsilon < \epsilon_{0\alpha}$ энергетического спектра, однако их доля мала, $\sim (v_*/v_{0\alpha})^{3/2}$ [41].

шихся α -частиц мал [$\Delta v \simeq v_{Ti} \ll v_{0\alpha}$, см. (1.19)], и поэтому пучок траекторий, приходящих в детектор, образованный частицами с различными значениями скорости, очень узкий ($\Delta R/R \simeq \Delta v/v \simeq v_{Ti}/v_{0\alpha} \ll 1$). Это означает, что в пределах распределения (1.19) все траектории частиц можно заменить единой траекторией с $v = v_{0\alpha}$, что соответствует замене в выражении (2.28) v на $v_{0\alpha}$:

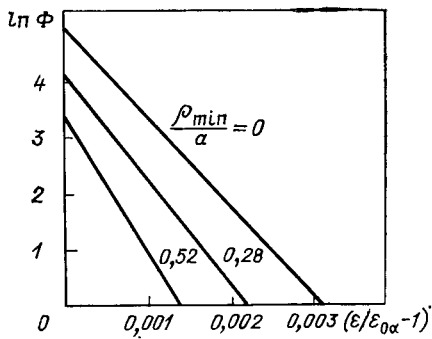
$$I(p, v, v) = \left(\frac{M}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{v_{0\alpha}} \iint \frac{Q(\psi) \exp[(v - v_{0\alpha})^2 M / (2T_i(\psi))]}{|\partial\psi/\partial z| \sqrt{T_i(\psi)}} \times \\ \times \delta(R^2 - Rv - (\psi - p)^2 / v_{0\alpha}^2) R dR d\psi. \quad (2.42)$$

Как легко видеть из этого выражения, задача о восстановлении параметров плазмы по известному распределению потока на стенке $I(p, v, v)$ распадается на две. Первая из них — это использование спектральных измерений для восстановления профиля ионной температуры $T_i(\psi)$ и вторая — восстановление профиля источника $Q(\psi)$ и распределение магнитного поля в плазме.

Первая задача хорошо известна, и в экспериментах на токамаках уже выполнены измерения ионной температуры по доплеровскому уширению спектров термоядерных частиц [44, 46, 49]. Как видно из выражения (2.42), задача восстановления профиля ионной температуры аналогична задаче, которая возникает при анализе спектров перезарядочных нейтральных частиц при пассивной корпускулярной диагностике [51]. Отличие заключается в том, что источник термоядерных частиц быстро спадает по радиусу $Q(\psi) \sim n^2 T^2$, и поэтому основной вклад в энергетический спектр дает участок траектории в окрестности $\psi = \psi_{\min}$, где мощность источника максимальна. Ближайшая к магнитной оси точка на траектории расположена в экваториальной плоскости тора, и поэтому детектор фактически «видит» температуру на экваториальной плоскости в той точке, через которую проходит траектория, попадающая в детектор. Эти рассуждения проиллюстрированы численными расчетами [31], результаты которых показаны на рис. 21. Расчеты выполнены для плазменного шнура с круглыми магнитными поверхностями, для параболических распределений плотности и температуры плазмы $n = n_0(1 - \rho^2/a^2)$, $T_i = T_0(1 - \rho^2/a^2)$ с $T_0 = 2$ кэВ. Как видно из этого рисунка, энергетический спектр выходящих частиц хорошо соответствует формуле (1.19) с температурой в точке $\rho = \rho_{\min}$. Если детектор не коллимирован, то энергетический спектр соответствует максимальной температуре плазмы.

Таким образом, набор коллимированных детекторов, имеющих энергетическое разрешение, позволяет восстановить профиль температуры ионов плазмы $T_i(\psi)$.

Рис. 21. Энергетические спектры $\Phi(\epsilon)$ выходящих на стенку термоядерных протонов с $\epsilon_{0\alpha} = 3,03$ МэВ. Наклон прямых соответствует температуре плазмы в точках $\rho = \rho_{\min}$ с погрешностью $< 7\%$



Другая возможность для диагностики плазмы связана с анализом пространственного распределения потоков термоядерных частиц. Проинтегрируем уравнение (2.42) по скорости:

$$F(p, v) = \int_0^{\infty} v_{0x} I(p, v, v) dv = \iint \frac{Q(\psi)}{|\partial\psi/\partial z|} \delta\left(R^2 - Rv - \frac{(\psi - p)^2}{v_{0\alpha}^2}\right) R dR d\psi. \quad (2.43)$$

В правой части (2.43), так же как и в (2.42) и (2.38), интегрирование для запертых частиц проводится по всему сечению плазменного шнура. Для пролетных частиц в качестве нижнего предела интегрирования по ψ берется величина p . Левая часть в (2.43) однозначно связана с распределением потока по поверхности стенки (R_G) и по питч-углам в момент выхода на стенку (χ_G) и может быть измерена в эксперименте. Задача заключается в восстановлении с помощью интегрального уравнения (2.43) неизвестной функции $G(R, \psi) = Q(\psi)/|\partial\psi/\partial z|$, которая связана с распределением источника термоядерных частиц и профилем плазменного тока $\partial\psi/\partial z \sim B_R$. Как видно из уравнения (2.43), эта задача очень похожа на задачу томографии [52], однако в отличие от последней интегрирование в (2.43) проводится по кривым второго порядка. Можно показать, что семейство гипербол топологически не является прямыми линиями и поэтому не существует преобразования координат, приводящего (2.43) к томографической задаче, в которой интегрирование проводится по прямым линиям и для которого построено обратное преобразование [53]. Ниже рассмотрены некоторые частные случаи, для которых можно найти аналитическое решение обратной задачи.

Выясним сначала, какие плазменные параметры могут быть найдены в результате решения обратной задачи. Геометрию

магнитных поверхностей в плазме можно задать в следующем общем виде:

$$z^2 + (R - R_0)^2 = \rho^2(\psi) + \Delta(\psi)(R - R_0) + \\ + e(\psi)(R - R_0)^2 + t(\psi)(R - R_0)^3 + \dots \quad (2.44)$$

Здесь R_0 — радиус граничной магнитной поверхности; $\Delta(\psi)$ характеризует смещение магнитных поверхностей; $e(\psi)$ — их эллиптичность, $t(\psi)$ — треугольность и т. д.; $\rho(\psi)$ однозначно связана с распределением плазменного тока по сечению шнура. Набор функций $\rho(\psi)$, $\Delta(\psi)$, $e(\psi)$... полностью задает распределение магнитного поля в плазме.

Теперь можно ввести дополнительное априорное предположение. Будем считать, что для плазменных параметров справедливо уравнение равновесия $\nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$, которое позволяет выразить весь набор неизвестных функций, входящих в уравнение (2.44) через две независимые функции. Обычно при решении уравнения равновесия в качестве таких функций выбирают профиль давления и профиль тока [в нашем случае $\rho(\psi)$].

Таким образом, с учетом уравнения равновесия функцию $G(R, \psi)$, входящую в интегральное уравнение (2.43), можно выразить через три неизвестные функции $Q(\psi)$, $\rho(\psi)$ и $p(\psi)$. Эти функции и следует определять при решении обратной задачи для дрейфовых потерь термоядерных частиц.

Рассмотрим теперь в качестве примера частный случай, который имеет аналитическое решение обратной задачи. Допустим, что магнитные поверхности представляют собой концентрические окружности, т. е. $\Delta(\psi) = e(\psi) = t(\psi) = \dots = 0$, и вместо неизвестной функции $\rho(\psi)$ введем обратную функцию $\psi(\rho)$. Переходя в (2.43) к интегрированию по ρ , получаем

$$F(p, v) = \iint \frac{Q(\rho) \rho}{\sqrt{\rho^2 - (R - R_0)^2}} \left(R^2 - Rv - \frac{(\psi(\rho) - p)^2}{v_{0\alpha}^2} \right) R dR d\rho. \quad (2.45)$$

Теперь с помощью (2.9) и (2.10) вернемся от p и v к переменным χ_G и R_G и выполним в (2.45) интегрирование по R :

$$F(\chi_G, R_G) = F(p, v) \frac{\partial(p, v)}{\partial(\chi_G, R_G)} = \\ = R_G v_{0\alpha} \int_{\rho_{\min}}^a \frac{Q(\rho) \rho}{\sqrt{\rho^2 - (R - R_0)^2}} \left(\frac{1 + \chi_G^2}{1 + \chi^2} \right) d\rho. \quad (2.46)$$

Здесь $\rho_{\min} = \rho_{\min}(R_G, \chi_G)$ — минимальное значение ρ на траектории частицы, а величины R и χ , входящие в подынтегральное выражение, должны быть выражены через ρ с помощью уравнений для траектории (2.9) и (2.10). Распределение плазменного тока входит в выражение (2.46) неявно, через уравнение для траектории частицы.

Учтем теперь, что функция $Q(\rho)$ быстро спадает по радиусу, и разложим подкоренное выражение в интеграле в ряд по ρ в окрестности точки $\rho = \rho_{\min}$. Кроме того, заменим функцию $(1 + \chi^2_G) / (1 + \chi^2)$ ее значением при $\rho = \rho_{\min}$. В результате получим

$$F(R_G, \chi_G) = \bar{F}(R_G, \chi_G) + (F - \bar{F}) =$$

$$= \frac{(1 + \chi_G^2) R_G v_{0\alpha}}{\sqrt{1 + \chi_m^2} \sqrt{1 + \chi_m^2 - 2\chi_m d\psi_m/dR}} \int_{\rho_{\min}}^a \frac{Q(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{\min}^2(R_G, \chi_G)}} + (F - \bar{F}). \quad (2.47)$$

Здесь $\chi_m = \chi(\rho_{\min}, R_G, \chi_G)$; $\psi_m(R) = \psi(R, z)|_{z=0}$.

Как показано в [31], первое слагаемое в правой части (2.47) является хорошим приближением для функции $F(R_G, \chi_G)$. Для широкого диапазона изменения параметров плазмы поправка $(F - \bar{F})/\bar{F}$ не превышает 15%. Ниже опустим второе слагаемое в (2.47). Точность восстановления параметров плазмы всегда можно повысить, учитывая поправку $F - \bar{F}$ по методу последовательных приближений.

Для того чтобы определить две неизвестные функции $Q(\rho)$ и $\psi(\rho)$, достаточно задать функцию $F(R_G, \chi_G)$ вдоль двух кривых $\chi_{G1}(R_G)$ и $\chi_{G2}(R_G)$ на плоскости χ_G, R_G . Для подходящего выбора этих кривых (в эксперименте это означает выбор подходящей ориентации датчика, расположенного в точке R_G на стенке) рассмотрим линии уровня функции $x(\chi_G, R_G) = (R_m - R_0)/a$, где R_m — радиус точки пересечения траекторией частицы экватори-

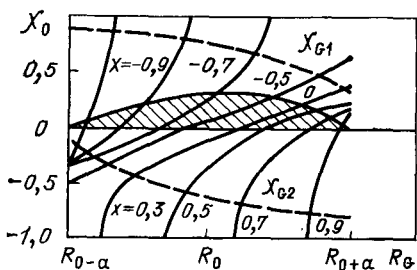


Рис. 22. Линии уровня величины $x = (R_m - R_0)/a$ для термоядерных протонов с $v_{0\alpha} = 3,03$ МэВ на плоскости R_G, χ_G (сплошные кривые), рассчитанные для $j = j_0(1 - \rho^2/a^2)$ и $J_p = 0,43$ МА. Заштрихованная область соответствует запертым частицам

альной плоскости тора. Отметим, что $\rho_{\min} = |x|a$. Линии уровня $x(R_G, \chi_G)$ приведены на рис. 22. Пунктиром показаны подходящие кривые, которые пересекают все линии уровня ρ_{\min} от 0 до 1. Вдоль этих кривых имеем распределение потока частиц $F_1(R_G) = F(\chi_{G1}(R_G), R_G)$ и $F_2(R_G) = F(\chi_{G2}(R_G), R_G)$. Оба распределения имеют максимум при тех значениях R_G , при которых $\rho_{\min} = 0$ и частицы выходят на стенку из окрестности магнитной оси. Очевидно, что выбор кривых χ_{G1} и χ_{G2} неоднозначен; единственное требование — чтобы вдоль этих кривых функция $R_m(R_0)$ изменялась монотонно. Поэтому эти кривые можно выбрать для некоторого диапазона плазменных токов и заранее неизвестного его распределения. В частности, в случае небольших плазменных токов,

$$J_p < (0,7\epsilon/Z\alpha) \sqrt{(m_\alpha/m_p)\epsilon_{0\alpha}}, \quad (2.48)$$

можно выбрать $\chi_{G1}(R_G) = 1$ и $\chi_{G2}(R_G) = -1$. Например, для протонов, рождающихся в реакции $d(^3\text{He}, p)\alpha$ с энергией 14,7 МэВ, условие (2.48) дает $J_p < 0,8 \div 0,9$ МА.

Выпишем теперь явные выражения для $F_1(R_G)$ и $F_2(R_G)$:

$$\left. \begin{aligned} F_1(R_G) &= \frac{(1 + \chi_{G1}^2(R_G))R_G v_{0\alpha}}{\sqrt{1 + \chi_{m1}^2} \sqrt{1 + \chi_{m1}^2 - 2\chi_{m1}\psi'_{m1}}} \int_{\rho_{\min 1}}^a \frac{Q(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{\min 1}^2(R_G)}}; \\ F_2(R_G) &= \frac{(1 + \chi_{G2}^2(R_G))R_G v_{0\alpha}}{\sqrt{1 + \chi_{m2}^2} \sqrt{1 + \chi_{m2}^2 - 2\chi_{m2}\psi'_{m2}}} \int_{\rho_{\min 2}}^a \frac{Q(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{\min 2}^2(R_G)}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Здесь и далее используется обозначение $\psi'_m = d\psi_m/dR$. Мы не знаем заранее зависимостей $\rho_{\min 1,2}(R_G)$, поскольку они определяются распределением плазменного тока. Однако в силу выбора χ_{G1} и χ_{G2} мы всегда можем подобрать такие значения R_{G1} и R_{G2} , при которых $\rho_{\min 1}(R_{G1}) = \rho_{\min 2}(R_{G2})$. Это позволяет исключить неизвестную функцию $Q(\rho)$ из системы уравнений (2.49):

$$\begin{aligned} \frac{F_1(R_{G1})}{R_{G1}} \frac{\sqrt{1 + \chi_{m1}^2} \sqrt{1 + \chi_{m1}^2 - 2\chi_{m1}\psi'_{m1}}}{1 + \chi_{G1}^2(R_{G1})} &= \\ = \frac{F_2(R_{G2})}{R_{G2}} \frac{\sqrt{1 + \chi_{m2}^2} \sqrt{1 + \chi_{m2}^2 - 2\chi_{m2}\psi'_{m2}}}{1 + \chi_{G2}^2(R_{G2})}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Значения χ_{m1} и χ_{m2} можно определить с помощью уравнений для траектории:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \chi_{m1}^2)R &= (1 - \chi_{G1}^2(R_{G1}))R_{G1}; \\ (1 - \chi_{m2}^2)R &= (1 - \chi_{G2}^2(R_{G2}))R_{G2}; \\ -\chi_{m1}Rv_{0\alpha} + \psi_m(R) &= -\chi_{G1}R_{G1}v_{0\alpha} + \psi_G; \\ -\chi_{m2}Rv_{0\alpha} + \psi_m(R) &= -\chi_{G2}R_{G2}v_{0\alpha} + \psi_G. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Система уравнений (2.50), (2.51) после исключения χ_{m1} , χ_{m2} , R_{G1} , R_{G2} сводится к дифференциальному уравнению для неизвестной функции $\psi_m(R)$. Напомним, что для рассматриваемого случая круглых магнитных поверхностей $\psi(\rho) = \psi_m(|R - R_0|)$.

Если функция $\psi(\rho)$ найдена, то вторую неизвестную функцию $Q(\rho)$ можно определить из решения уравнения Абеля (2.49).

Для проверки предложенного алгоритма восстановления функций $Q(\rho)$ и $\psi(\rho)$ рассмотрим случай малых токов (2.48) с $\chi_{G1,2} = \pm 1$. В этом случае система (2.50), (2.51) упрощается:

$$\left. \begin{aligned} F_1(R_{G1})\sqrt{1 - \psi'_m} &= F_2(R_{G2})\sqrt{1 + \psi'_m}; \\ R - \psi_m &= R_{G1} - \psi_G; \\ R + \psi_m &= R_{G2} + \psi_G. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Исключая из системы уравнений (2.52) ψ'_m , R и ψ_m , получаем связь между R_{G1} и R_{G2} :

$$\int_{R_0-a}^{R_{G2}} F_2^2(R) dR = \int_{R_0-a}^{R_{G1}} F_1^2(R) dR. \quad (2.53)$$

Первое уравнение системы (2.52) можно переписать в виде

$$\psi'_m = \frac{F_1^2(R_{G1}) - F_2^2(R_{G2})}{F_1^2(R_{G1}) + F_2^2(R_{G2})}. \quad (2.54)$$

Складывая теперь второе и третье уравнения (2.52), имеем

$$R = (R_{G1} + R_{G2})/2. \quad (2.55)$$

Система уравнений (2.53) — (2.55) задает параметрическую зависимость ψ'_m от R .

Для того чтобы проверить точность описанного выше алгоритма решения обратной задачи, в [32] были выполнены численные расчеты профиля тока $j(\rho)$ и источника термоядерных реакций $Q(\rho)$. С помощью точного выражения (2.46) по заданным $j(\rho)$ и $Q(\rho)$ рассчитывали распределения потоков $F_1(R_G)$ и $F_2(R_G)$ в десяти точках на поверхности плазмы. К полученным значениям добавляли десятипроцентную случайную относитель-

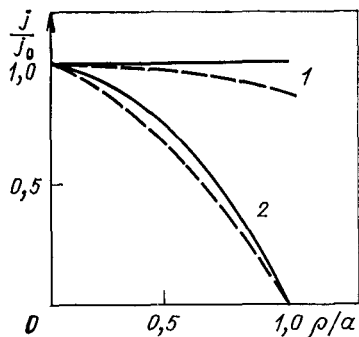


Рис. 23. Исходные (сплошные линии) и восстановленные (пунктир) профили плазменного тока:
 $1 - j = \text{const}$; $2 - j \sim 1 - \rho^2/a^2$

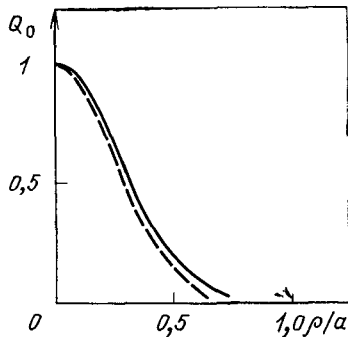


Рис. 24. Исходный (сплошные линии) и восстановленный (пунктир) профили источника α -частиц. Расчеты выполнены для $j = j_0(1 - \rho^2/a^2)$

ную погрешность, моделирующую экспериментальную погрешность измерения, и по полученным точкам проводили «экспериментальные» кривые $F^{\text{exp}}_1(R_G)$ и $F^{\text{exp}}_2(R_G)$. Эти зависимости использовали в уравнениях (2.53) — (2.55) для расчета $\psi'(\rho)$ и в уравнении (2.49) для вычисления $Q(\rho)$. На рис. 23 и 24 показаны исходные и восстановленные профили тока $j(\rho)$ и мощности источника $Q(\rho)$. Видно, что описанная выше процедура в случае малых токов (2.48) дает хорошую точность восстановления исходных параметров плазмы.

При больших токах в плазме пролетные частицы с $\chi = \pm 1$ начинают удерживаться в плазме, и для восстановления профилей необходимо использовать систему уравнений (2.50), (2.51) (см., например, [31]).

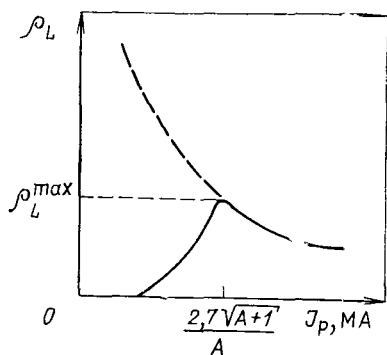


Рис. 25. Качественная зависимость минимального ларморовского радиуса α -частиц, пригодных для диагностики плазмы, от плазменного тока J_p

Таким образом, энергетические спектры выходящих на стенку термоядерных частиц позволяют определить распределение температуры ионов по радиусу плазменного шнура, а пространственное распределение потоков дает возможность восстановить профили источника термоядерных частиц и плотности плазменного тока.

Следует отметить, что в подынтегральное выражение (2.47) должно входить распределение

источника ларморовских центров $\bar{Q}_L(\rho)$, которое заменяли выше истинным распределением источника $Q(\rho)$. Точность такого приближения связана с ларморовским радиусом α -частиц:

$$\frac{|Q_L - Q|}{Q} \approx \left| \frac{1}{4} \frac{\rho_L^2}{Q} \frac{d^2 Q}{d\rho^2} \right|. \quad (2.56)$$

Поскольку $\rho_L \sim B^{-1} \sim J^{-1/p}$, то при малых значениях плазменного тока конечность ларморовского радиуса может приводить к большим погрешностям. Однако при малых токах для диагностики плазмы можно использовать частицы с малыми значениями поперечной скорости $v_{\perp} < v_{\parallel}$, у которых ларморовский радиус мал. Эта ситуация проиллюстрирована качественно на рис. 25, на котором показано минимальное значение ларморовского радиуса α -частиц, пригодное для диагностики плазмы. Как видно из этого рисунка, ларморовский радиус не превышает $\rho_{L\max} = a\epsilon / (2q(1+\epsilon))$, и поэтому оценку (2.56) можно переписать в виде

$$\left| \frac{Q_L - Q}{Q} \right| < \frac{\epsilon^2}{16q^2(1+\epsilon)^2} \left| \frac{a^2}{Q} \frac{d^2 Q}{d\rho^2} \right|. \quad (2.57)$$

В широком диапазоне изменений параметров правая часть (2.57) не превышает 10%.

2.7. Обратная задача для частиц с большим ларморовским радиусом

В небольшом токамаке с малым плазменным током может реализоваться ситуация, при которой диаметр ларморовской окружности термоядерных частиц сравним или превышает малый радиус плазменного шнура. Например, для термоядерных протонов с энергией 14,7 МэВ (реакция 5а из табл. 1) условие $2\rho_L/a > 1$ выполняется при $B_T a < 110$ Тл·см. При таких ларморовских радиусах траектория частицы с хорошей точностью представляет собой дугу окружности*. Зная координаты выхода частицы на стенку, ее скорость и углы падения, можно полностью определить ее траекторию: $x = x_0 + \rho_L \cos \varphi$, $y = y_0 + \rho_L \sin \varphi$, т. е. определить центр окружности и ее радиус $\rho_L = mcv_{\perp} / (eB)$. Обозначив dN число частиц, выходящих на

* Смещением ларморовского центра из-за торондального дрейфа $\Delta r_{др} \approx \approx V_{др}/\omega_i \approx \rho_L^2 \epsilon / a$ и продольного движения $\Delta r_{\parallel} \approx v_{\parallel} B_{\theta} / B_T \omega_i \approx \rho_L \epsilon / q$. можно пренебречь.

стенку с данной ларморовской окружности, получим

$$\Phi(x_0, y_0, \rho_\perp) = \frac{dN}{dx_0 dy_0 d\chi} = \frac{1}{4\pi} \int_S dx dy \int_0^{2\pi} Q(x, y) \delta(x - x_0 - \rho_\perp \cos \varphi) \delta(y - y_0 - \rho_\perp \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int Q(x, y) \delta[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \rho_\perp^2] dx dy. \quad (2.58)$$

Интегрирование в (2.58) проводится по всему сечению плазменного шнура. Для диагностики плазмы представляет интерес реконструкция плотности источника $Q(x, y)$ по известному распределению потока по поверхности стенки. Следует отметить, что преобразование (2.58) переводит функцию двух переменных в функцию трех переменных. Поэтому для решения обратной задачи не нужно знать $\Phi(x_0, y_0, \rho_\perp)$ при всех значениях параметров, достаточно задать Φ на какой-либо двухмерной поверхности в пространстве x_0, y_0, ρ_\perp . В качестве такой поверхности можно выбрать плоскость $\rho = \text{const}$. Однако в этом случае обратная задача для преобразования (2.58) становится неоднозначной, что отмечено еще в [52]. Действительно, выполняя в (2.58) преобразование Фурье по переменным x_0, y_0 в подынтегральном выражении, получаем

$$\widehat{\Phi}(k_x, k_y) = \widehat{Q}(k_x, k_y) J_0(|k|\rho), \quad (2.59)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. Из (2.59) видно, что гармоническое возмущение функции $Q(x, y)$ с длиной волны $|k| = \mu_n/\rho$, где μ_n — корни функции Бесселя $J_0(x)$, не изменяют левой части (2.58). В нашем случае, когда характерные размеры плазмы сравнимы с радиусом траектории, использование для диагностики плазмы частиц с одинаковым ларморовским радиусом невозможно.

Рассмотрим теперь другой случай, когда вылетающие из плазмы термоядерные моноэнергетические частицы регистрируются в одной единственной точке на стенке (рис. 26). В этом случае положение ларморовского центра и ларморовский радиус однозначно определяются углами падения частицы на стенку φ_G и $\chi_G = v_\parallel/v$ ($\rho_\perp \sim \sqrt{1 - \chi_G^2}$). Такая постановка задачи соответствует фотографированию плазмы в термоядерных частицах камерой-обскурой. Если перенести начало координат в точку измерения, то легко получить, что для регистрируемых частиц $x_0^2 + y_0^2 = \rho^2$. Покажем, что в этом случае преобразование, обратное (2.58), становится однозначным. Воспользуемся конформным преобразованием $w = 1/z$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$. При этом все окружности на плоскости x, y , проходящие через начало координат, преобразуются в прямые, а интегральное

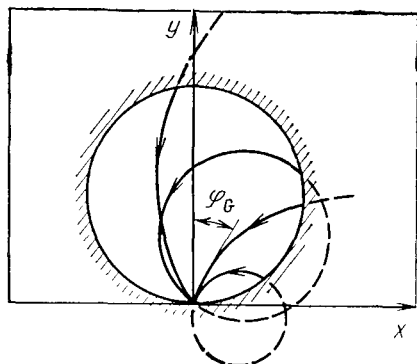


Рис. 26. Траектории частиц с $\rho_n \gg a$ (детектор расположен в начале координат)

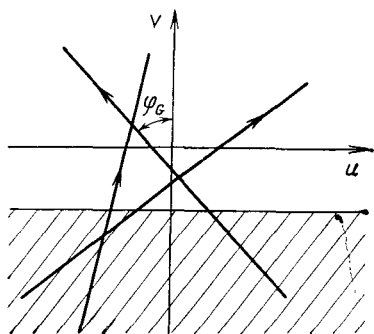


Рис. 27. Траектории частиц и область, занятая плазмой (заштрихована), на плоскости u, v

уравнение (2.58) сводится к известному преобразованию Радона [52], широко используемому в томографии:

$$\Phi(\varphi_0, \rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \iint \frac{Q(u, v)}{u^2 + v^2} \delta\left(\frac{1}{2\rho} - u \cos \varphi_G - v \sin \varphi_G\right) dudv. \quad (2.60)$$

Здесь φ_G — угол падения частицы на стенку (см. рис. 26); $x_0 = \rho \cos \varphi_G$; $y_0 = -\rho \sin \varphi_G$. На рис. 27 показаны траектории частиц и граница плазмы на плоскости w . Преобразование (2.60) взаимно однозначное, и для него известно обратное преобразование, используя которое и возвращаясь к переменным x, y , получаем решение интегрального уравнения (2.58):

$$Q(x, y) = 4 \int_0^{\infty} \frac{dF(r)}{dr} r dr, \quad (2.61)$$

$$\text{где } F(r) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi\left(\varphi_G, \frac{(x^2 + y^2)r}{x^2 + y^2 - 2rx \cos \varphi_G - 2ry \sin \varphi_G}\right) \times \\ \times \frac{d\varphi_0}{x^2 + y^2 - 2rx \cos \varphi_G - 2ry \sin \varphi_G}.$$

Отметим, что $\Phi(\varphi_0, \rho^{-1})/\rho$ не имеет особенностей при $\rho=0$, и поэтому интеграл в (2.61) сходится при любых значениях x, y и r .

С помощью камеры-обскуры можно определить значение $\Phi(\varphi_0, \rho)$ только для «входящих в точку a частиц, которым соответствуют углы падения $-\pi/2 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$. В принципе, можно добавить датчики, расположив их на поверхности стенки так, чтобы они регистрировали частицы, «выходящие» из точки a , с $\pi/2 < \varphi_0 < 3\pi/2$. При этом будет получена полная информа-

ция о распределении источника $Q(x, y)$. Однако обычно на практике функция $Q(x, y)$ достаточно гладкая и обладает свойствами симметрии. При реконструкции $Q(x, y)$ можно сделать и другие априорные предположения. В этом случае вопрос о том, насколько детально может быть восстановлена функция источника с помощью регистрации частиц в единственной точке, должен решаться практически, с помощью численного моделирования.

2.8. Потери α -частиц из области удержания в результате рассеяния

В фазовом пространстве α -частиц p, v, v существует конус потерь, из которого частицы сразу выходят на стенку. Подобные дрейфовые потери были изучены выше. Здесь же рассмотрим потери α -частиц из области удержания. Отметим, что в приближении аксиально-симметричного магнитного поля, которое рассматривается в этой главе, потери частиц из области удержания могут быть связаны лишь с рассеянием частиц в пространстве скоростей. В область (конус) прямых дрейфовых потерь частица может попасть в результате рассеяния либо непосредственно, либо из-за пространственной диффузии, связанной с рассеянием. Для расчета и классификации подобных диффузионных потоков введем вместо p и v более удобные здесь переменные: R_G — радиальную координату точки выхода частицы на стенку и значение ее продольной скорости, которое задается величиной χ_G :

$$(1 - \chi_G^2)R_G = v; \quad \psi_G - \chi_G v R_G = p. \quad (2.62)$$

На рис. 14 R_G — координата точки пересечения траекторией линии $\psi = \psi_G$, причем области прямых дрейфовых потерь соответствуют значения R_G , лежащие в интервале $R_{\min} < R_G < R_{\max}$, где R_{\max} и R_{\min} — радиусы внешнего и внутреннего обвода граничной магнитной поверхности.

Граница между областью удержания и областью прямых потерь на R_G, χ_G показана на рис. 28. Для запертых частиц, т. е. частиц, у которых вершина гипербол ($\chi = 0$) на рис. 14 лежит внутри области, занимаемой плазмой, границей, разделяющей области прямых потерь и удержания, является линия bc ($R_G = R_{\max}$ на плоскости R_G, χ_G). Если вершина гиперболы лежит левее области, занимаемой плазмой, траектория разделяется на две траектории пролетных частиц, различающихся знаком продольной скорости (см. рис. 14). Положительно пролетные частицы ($\chi > 0$) (на рис. 14 это траектория 2) имеют ту же границу $R_G = R_{\max}$ для области прямых потерь, что и запертые частицы (линия ab на рис. 28). Отрицательно пролетные

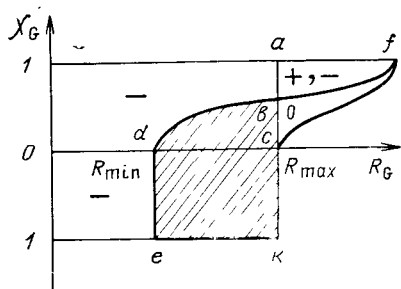


Рис. 28. Области удержания и прямых потерь (заштрихована). На плоскости R_G, χ_G . Нулем отмечена область удержания запертых частиц, «+» и «-» — положительно ($\chi > 0$) и отрицательно ($\chi < 0$) пролетных частиц

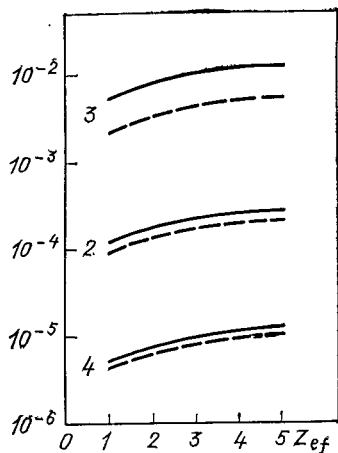


Рис. 29. Зависимости доли частиц (сплошные кривые) и энергии (пунктир) от Z_{ef} ионов плазмы для различных токамаков (табл. 4)

частицы ($\chi < 0$) попадают в область прямых потерь при пересечении линии $R_G = R_{min}$ (линия de). Кроме того, отрицательно пролетные частицы могут попасть на стенку, если в результате рассеяния они перейдут в запертые. Сепаратрисе между запертыми и пролетными частицами соответствуют траектории, касающиеся левой границы области плазмы. На плоскости χ_G, R_G на рис. 28 сепаратриса изображена линией dbf . Если частица пересекает сепаратрису на участке db , она попадает в область прямых потерь и выходит на стенку.

При торможении частицы значение R_G изменяется таким образом, что частица удаляется от границы области прямых потерь $R_G = R_{max}, R_G = R_{min}$. Например, в случае запертых частиц можно считать, что при торможении не меняются координаты точки отражения, откуда следует, что $\dot{R}_G/R_G \simeq -2\dot{v}/v$. Так же можно показать, что отрицательно пролетные частицы удаляются при торможении влево от границы $R_G = R_{min}$. Поэтому если рассеяние α -частиц не слишком велико, то оно приводит к уходу частиц в область потерь в основном через сепаратрису dbf .

Оценим дополнительную долю частиц и энергии, выносимых из плазмы за счет кулоновского рассеяния α -частиц на ионах плазмы. Так как кулоновское рассеяние мало, то за время охлаждения границы db достигнут частицы из узкой области

$$\Delta\chi \simeq (D\tau_s)^{1/2} \simeq \left[\frac{1}{2} \frac{m_i}{m_\alpha} \frac{v_*^3}{v_{0\alpha}^3} \right]^{1/2}, \quad (2.63)$$

откуда следует, что доля частиц, теряемых из-за рассеяния на ионах ν_p , как правило, составляет малую часть от прямых дрейфовых потерь: $\nu_p \approx \Delta\chi(1-K_\alpha)$. Для термоядерного диапазона температур ($T \sim 10$ кэВ) $\nu_p \approx 0,1(1-K_\alpha)Z_{ef}^{1/2}$. Исключение составляет плазма с высоким содержанием примесей $Z_{ef} > 1$, для которой $\nu_p \sim \Delta\chi \sim Z_{ef}^{1/2}$ может быть сравнима с шириной конуса дрейфовых потерь.

В ряде работ [41, 54] выполнены численные расчеты дополнительных кулоновских потерь α -частиц, основанные на решении кинетического уравнения (1.28) с интегралом столкновений (1.30). Неоднородность плазмы в этих расчетах учитывалась введением в пространстве скоростей конуса потерь. На рис. 29 приведены результаты расчетов [41] доли частиц и энергии, теряемых из плазмы при рассеянии на ионах, в зависимости от Z_{ef} плазмы. Для всех трех токамаков различного масштаба результаты численных расчетов хорошо совпадают с приведенной выше оценкой $\nu_p \leq 0,1(1-K_\alpha)Z_{ef}^{1/2}$.

2.9. Распределение по стенке диффузионных потоков α -частиц

Распределение диффузионного потока по поверхности камеры, вообще говоря, зависит от распределения источника рождения термоядерных частиц и их пространственного коэффициента диффузии, т. е. от решения кинетического уравнения для удерживаемых в плазме частиц (см. § 2.10). Однако оказывается, что в тороидальной плазме значительная часть диффузионного потока локализована и имеет универсальное распределение по поверхности стенки, которое практически не зависит от решения внутренней задачи. Это связано с тем, что в аксиально-симметричном магнитном поле токамака наиболее близкая к стенке точка на дрейфовой траектории расположена в экваториальной плоскости тора, поэтому частицы, быстро движущиеся по орбите с периодом τ_b и медленно дрейфующие за счет диффузии с характерным временем τ_{dif} , выходят на стенку в основном в узкой окрестности экваториальной плоскости шириной $(\tau_b/\tau_{dif})^{1/2}$.

Для расчета диффузионных потоков воспользуемся кинетическим уравнением (2.21). В области прямых дрейфовых потерь функция распределения описывается выражением (2.24).

В области удержания с замкнутыми дрейфовыми траекториями кинетическое уравнение (2.21) можно решать разложением в ряд по малому параметру $\delta = \tau_b/\tau_s \ll 1$ (см. § 2.10). Для того чтобы сшить решения в этих двух областях и тем самым поставить граничные условия для функции распределения в области удержания, необходимо решить задачу в пограничном

слое между двумя областями. Это решение и определит распределение диффузионных потерь по поверхности стенки.

В нулевом приближении по малому параметру δ функция распределения частиц в области дрейфовых потерь равна нулю. В этом приближении на границе между областями имеется скачок на функции распределения. Диффузионные слагаемые, входящие в интеграл столкновений, приводят к небольшому разрыву. В этом смысле рассматриваемая задача во многом напоминает задачу о вязком пограничном слое в гидродинамике. В окрестности границы между областями уравнение (2.22) можно упростить, оставив в правой части лишь вторую производную в направлении, перпендикулярном границе.

Рассмотрим сначала запертые частицы. Как видно из рис. 28, для таких частиц границей будет линия bc , на которой $R_G = R_{\max}$. Оставляя в интеграле столкновений главные члены и пренебрегая источником частиц, получаем

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{8D\omega_{i0}R_0v^2(\psi - \psi_G)^2 \partial^2 f}{\tau_s v^4 (1 + \chi_G^2)^2 (1 + \chi^2) R R_G \partial R_G^2}. \quad (2.64)$$

Для дальнейшего потребуются некоторые упрощения. Предположим, что плазма имеет круглые концентрические магнитные поверхности $z^2 + (R - R_0)^2 = \rho^2(\psi)$, так что

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{d\psi}{d\rho} \frac{z}{\rho}, \quad (2.65)$$

и вычислим значения ψ , при которых для данной траектории (R_G и χ_G) функция $z(\psi)$ обращается в нуль. Как видно из рис. 30, таких значений, вообще говоря, четыре, и они соответствуют точкам пересечения кривых (2.11) с экваториальной плоскостью тора $\psi = \psi(R, 0)$.

Для того чтобы довести аналитические оценки до конца, будем считать, что ширина траектории мала: $|\psi_1 - \psi_2| / \psi_G \ll 1$. В этом случае

$$z^2 \simeq a^2 - (R - R_0)^2 \simeq \frac{(\psi_1 - \psi)(\psi - \psi_2)(\psi - \psi_3)(\psi - \psi_4)}{v^4 (R_{\max} + R_G \chi_G^2) (R_{\min} + R_G \chi_G^2)}. \quad (2.66)$$

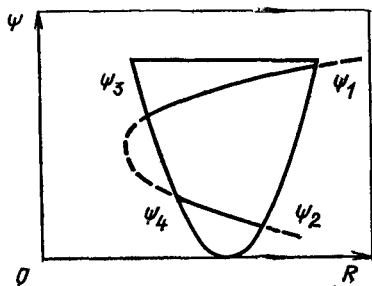


Рис. 30. Граничные значения ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 и ψ_4 для дрейфовой траектории

Здесь $R_{\max} = R_0 + a$; $R_{\min} = R_0 - a$;

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= p + vR_{\max}^{1/2} (R_{\max} - R_G (1 - \chi_G^2))^{1/2}; \\ \psi_2 &= p - vR_{\max}^{1/2} (R_{\max} - R_G (1 - \chi_G^2))^{1/2}; \\ \psi_3 &= p + vR_{\min}^{1/2} (R_{\min} - R_G (1 - \chi_G^2))^{1/2}; \\ \psi_4 &= p - vR_{\min}^{1/2} (R_{\min} - R_G (1 - \chi_G^2))^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

Для запертых частиц, у которых $R_G(1 - \chi_G^2) > R_{\min}$, два последних корня комплексны.

Сделаем в уравнении (2.66) еще одну замену переменных:

$$\psi = \frac{\psi_{\max} - \psi_{\min}}{2} \cos \alpha + \frac{\psi_{\max} + \psi_{\min}}{2}, \quad (2.68)$$

где $\psi_{\max} = \psi_1$; $\psi_{\min} = \psi_2$. Тогда

$$z^2 = \frac{R_{\max}^2 \chi_G^4 \sin^2 \alpha}{(1 + \chi_G^2)(1 + \chi_G^2 - 2a/R_{\max})} \left(\cos^2 \alpha + \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \frac{2a/R_{\max} - \chi_G^2}{\chi_G^2} \right),$$

и уравнение (2.64), учитывая (2.65), можно переписать в виде

$$\frac{(\cos^2 \alpha + \Delta_0)^{1/2}}{(1 - \cos \alpha)^2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} = \widehat{D}_0 \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial R_G^2}. \quad (2.69)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \frac{2a/R_{\max} - \chi_G^2}{\chi_G^2}; \\ \widehat{D}_0 &= \frac{8\bar{D}\omega_{i0}R_0R_{\max}^2 \alpha \chi_G (1 - \chi_G^2)^2 (1 + \chi_G^2 - 2a/R_{\max})^{1/2}}{\bar{\tau}_s v (1 + \chi_G^2)^{5/2} \psi'_G}. \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

В выражении (2.69) $D(\psi)$ и $\tau_s(\psi)$ заменены их средними значениями на траектории \bar{D} и $\bar{\tau}_s$.

В случае положительно пролетных частиц траектория ограничивается значениями $\psi_{\max} = \psi_1$, $\psi_{\min} = \psi_3$ (см. рис. 30). Используя замену (2.68), уравнение (2.64) для таких частиц приведем к виду

$$\frac{(\cos \alpha + 1 + \Delta_+)^{1/2} (\cos \alpha + 3 + \Delta_-)^{1/2}}{(1 - \cos \alpha)^2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} = \widehat{D}_+ \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial R_G^2}, \quad (2.71)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_+ &= 4 \frac{R_{\min}^{1/2}}{R_{\max}^{1/2}} \frac{(\chi_G^2 - 2a/R_{\max})^{1/2}}{\chi_G - (R_{\min}/R_{\max})^{1/2} (\chi_G^2 - 2a/R_{\max})^{1/2}}; \\ \widehat{D}_+ &= \frac{4\bar{D}\omega_{i0}R_0R_{\max}^2 a(1 - \chi_G^2)^2 (1 + \chi_G^2 - 2a/R_{\max})^{1/2}}{\bar{\tau}_s v \psi'_G (1 + \chi_G^2)^{5/2}} \times \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

$$\times \left(\chi_G - \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^{1/2} \left(\chi_G^2 - \frac{2a}{R_{\max}} \right)^{1/2} \right).$$

Обратимся теперь к отрицательно пролетным частицам ($\chi < 0$). Эти частицы делятся на две группы, которые различаются знаком χ_G . Отрицательно пролетные частицы с положительным значением χ_G (траектория 3 на рис. 14) могут выйти на стенку, пересекая границу области потерь на участке db (см. рис. 28). Распределение таких частиц по поверхности стенки более или менее равномерно и определяется решением кинетической задачи в области удержания.

Частицы с $\chi_G < 0$ (траектория 4 на рис. 14) покидают плазму, пересекая границу de , на которой $R_G = R_{\min}$, и поэтому все выходят в узкой окрестности экваториальной плоскости на внутреннем обводе стенки. Для таких частиц, так же как и для положительно пролетных, можно получить универсальное распределение потока по поверхности стенки. Поэтому, как и ранее, введем замену (2.68) с $\psi_{\max} = \psi_4$, $\psi_{\min} = \psi_2$ и преобразуем уравнение (2.64):

$$\frac{(1 + \Delta_- - \cos \alpha)^{1/2} (3 + \Delta_- - \cos \alpha)^{1/2}}{(1 - \cos \alpha)^2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} = \hat{D}_- \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial R_G^2}, \quad (2.73)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_- &= 4 \frac{R_{\min}^{1/2}}{R_{\max}^{1/2}} \frac{|\chi_G|}{(\chi_G^2 + 2a/R_{\min})^{1/2} - |\chi_G| R_{\min}^{1/2}/R_{\max}^{1/2}}; \\ \hat{D}_- &= \frac{4\bar{D}\omega_{i0}R_0R_{\min}^2 a(1 - \chi_G^2)^2(1 + \chi_G^2 + 2a/R_{\min})^{1/2}}{\bar{\tau}_s v \psi'_G (1 + \chi_G^2)^{5/2}} \times \\ &\times [(R_{\max}/R_{\min})^{1/2} (\chi_G^2 + 2a/R_{\min})^{1/2} - |\chi_G|]. \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Рассмотрим теперь граничные условия для уравнений (2.69), (2.71) и (2.73). Начнем со случая запертых частиц. В переменных α и R_G стенка располагается на линии $\psi = \psi_G$, т. е.

$$\psi_G = v R_{\max}^{1/2} (R_{\max} - R_G (1 - \chi_G^2))^{1/2} \cos \alpha + p.$$

Выражая p через R_G и χ_G с помощью соотношений (2.63), получаем уравнение для границы

$$\chi_G R_G = R_{\max}^{1/2} (R_{\max} - R_G (1 - \chi_G^2))^{1/2} \cos \alpha. \quad (2.75)$$

При $\alpha = 0$ стенка расположена в точке $R_G = R_{\max}$, а с ростом α она отодвигается в сторону меньших значений R_G . При $\alpha = 2\pi$ стенка снова оказывается в точке $R_G = R_{\max}$ (рис. 31). Чтобы понять характер решения в переходном слое, можно использовать нестационарную аналогию с периодически движущимся

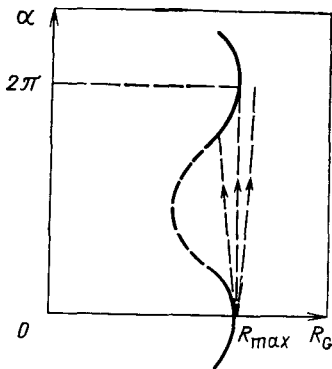


Рис. 31. Положение стенки (сплошная линия) на плоскости α, R_G для запертых частиц. В результате диффузии частицы выходят в окрестности $\alpha=2\pi$ ($R_G=R_{\max}$)

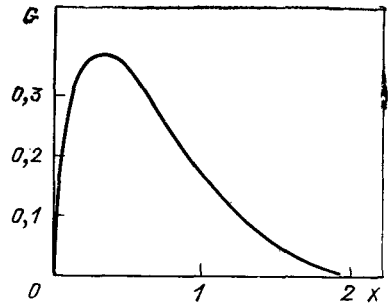


Рис. 32. Функция $G(x)$, описывающая распределение диффузионного потока частиц по поверхности стенки

поршнем, рассматривая в качестве времени переменную α . Так как коэффициент диффузии в уравнении (2.69) мал ($\bar{D} \sim \tau_b / \tau_s \ll 1$), то после того как поршень отодвинется от границы плазмы, происходит практически свободный диффузионный распад разрыва у функции распределения f_α . После того как через время 2π поршень вернется в исходное состояние $R_G=R_{\max}$, он в узкой окрестности $R_G \simeq R_{\max}$ соберет на себя частицы, продиффундировавшие в сторону меньших значений R_G . Та же ситуация характерна для положительно пролетных и отрицательно пролетных частиц с $\chi_G < 0$. Во всех трех случаях достаточно рассмотреть задачу о диффузионном размыве свободной границы.

В случае запертых частиц сделаем в уравнении (2.69) замену

$$\varphi = \int_0^\alpha (1 - \cos \alpha)^2 d\alpha / \sqrt{\cos^2 \alpha + \Delta_0}, \quad (2.76)$$

причем $\alpha=2\pi$ соответствует

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{\max} = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \alpha)^2 d\alpha / \sqrt{\cos^2 \alpha + \Delta_0} = \\ &= (4/\kappa) (2\kappa^2 - 1) K(\kappa) + (4/\kappa) E(\kappa), \end{aligned}$$

где K, E — полные эллиптические интегралы; $\kappa = (1 + \Delta_0)^{-1/2}$.

С помощью замены (2.76) уравнение (2.69) приводится к стандартному виду

$$\partial f_\alpha / \partial \varphi = \widehat{D} \partial^2 f / \partial R^2 G. \quad (2.77)$$

С учетом начальных условий при $\varphi=0$

$$f_{\alpha} = \begin{cases} f_0; & R_G > R_{\max}; \\ 0; & R_G \leq R_{\max} \end{cases}$$

из уравнения (2.77) следует

$$f_{\alpha} = \frac{f_0}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{R_{\max} - R_G}{\sqrt{4D\varphi}} \right) \right\}, \quad (2.78)$$

где $\operatorname{erf}(\lambda) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^{\lambda} e^{-t^2} dt$. С помощью (2.78) можно рассчитать распределение потока частиц:

$$\Phi(R_G, \chi_G) = V_{\text{др}}(z/\rho) f_{\alpha} = \frac{v^2(1 + \chi_G^2) \xi_0^{1/2} f_0}{2\sqrt{2} \omega_{i0} R_0} G \left(\frac{R_{\max} - R_G}{a \xi_0} \right), \quad (2.79)$$

где $G(x) = x^{1/2} (1 - \operatorname{erf}(x))$;

$$\xi_0^2 = \frac{128 \bar{D} \omega_{i0} R_{\max}^{1/2} (1 - \chi_G^2)^2 (1 + \chi_G^2 - 2a/R_{\max})^{1/2} \chi_G}{\bar{\tau}_s v \epsilon \psi'_G (1 + \chi_G^2)^{5/2}} \times \\ \times (1/\kappa) \{2\kappa^2 - 1\} K(\kappa) + E(\kappa)\}.$$

Константу интегрирования f_0 можно выразить через полный диффузионный поток $\Phi_{\Sigma} = \int \Phi ds$:

$$f_0 = \frac{2\sqrt{\pi} \Phi_{\Sigma} \omega_{i0} R_0}{\sqrt{D\varphi_{\max}} v^2 (1 + \chi_G^2)}. \quad (2.80)$$

Аналогичным образом можно получить выражение и для потока пролетных частиц. В случае положительно пролетных частиц

$$G_+ = \frac{v^2(1 + \chi_G^2) f_0 \xi_+^{1/2}}{2\sqrt{2} \omega_{i0} R_0} G \left(\frac{R_{\max} - R_G}{a \xi_+} \right), \quad (2.81)$$

где $\xi_+^2 = \frac{48\pi I_s(\kappa_+) \bar{D} \omega_{i0} R_{\max}^2 (1 - \chi_G^2)^2 (1 + \chi_G^2 - 2a/R_{\max})^{1/2}}{\sqrt{2 + \Delta_+} \sqrt{4 + \Delta_+} \epsilon \bar{\tau}_s v \psi'_G (1 + \chi_G^2)^{5/2}} \times \\ \times [\chi_G - (R_{\min}/R_{\max})]^{1/2} (\chi_G^2 - 2a/R_{\max})^{1/2}$.

Здесь $\kappa_+ = (2/(2 + \Delta_+))^{1/2}$; $I_s(\kappa) = \frac{16}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha}}$.

Для отрицательно пролетных частиц с $\chi_G < 0$

$$\Phi_- = \frac{v^2(1 + \chi_G^2)f_0}{2\sqrt{2}\omega_{i0}R_0} \xi_-^{1/2} G\left(\frac{R_G - R_{\min}}{a\xi_-}\right), \quad (2.82)$$

где
$$\xi_-^2 = \frac{48\pi I_c(\kappa_-)\bar{D}\omega_{i0}R_{\min}^2(1 - \chi_G^2)^2(1 + \chi_G^2 + 2a/R_{\min})^{1/2}}{\sqrt{2 + \Delta_-}\sqrt{4 + \Delta_-}\epsilon\bar{\tau}_s v \psi'_G(1 + \chi_G^2)^{5/2}} \times$$

$$\times \left(\left(\frac{R_{\max}}{R_{\min}}\right)^{1/2} \left(\chi_G^2 + \frac{2a}{R_{\min}}\right)^{1/2} - |\chi_G| \right).$$

Здесь $\kappa_- = (2/(2 + \Delta_-))^{1/2}$; $I_c(\kappa) = \frac{16}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha}}$.

Таким образом, во всех трех рассмотренных случаях распределение потока по поверхности стенки описывается универсальной зависимостью, которая изображена на рис. 32.

Оценим ширину распределения ΔR_G для реальных параметров энергичных термоядерных частиц в токамаке. В случае запертых частиц ($\chi_G^2 \simeq a/R_0$)

$$\frac{\Delta R_G}{a} = \frac{R_{\max} - R_G}{a} \simeq \xi_0 \simeq 8 \left(\frac{2\pi q R_0 \bar{D} \chi_G}{v \bar{\tau}_s \epsilon^2} \right)^{1/2}.$$

Если ввести полоидальный угол θ , то получим

$$\Delta\theta \simeq \left(2 \frac{\Delta R_G}{a} \right)^{1/2} \simeq \frac{4}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{2\pi q R_0 \bar{D} \chi_G}{v \bar{\tau}_s} \right)^{1/4}.$$

Например, для α -частиц в реакторе-токамаке с параметрами $R_0 = 5$ м, $T = 15$ кэВ, $n = 10^{14}$ см $^{-3}$, $q = 3$, $\chi_G = \epsilon^{1/2}$ имеем $\Delta\theta \simeq \simeq 0,4D^{1/4}$. Даже при $D = 1$ $\Delta\theta < 1$. С уменьшением энергии частиц ширина распределения увеличивается, но не сильно. Если рассеяние определяется кулоновскими столкновениями, то $\bar{D} \sim \sim 1/v^3$ и $\Delta\theta \sim v^{-1}$. Однако в выражение для потока входит значение \bar{D} на краю плазмы, где коэффициенты переноса обычно аномальны и поэтому аномальным может быть и рассеяние α -частиц. Распределение диффузионных потоков по поверхности стенки может дать информацию о характере взаимодействия α -частиц с плазмой в пристеночной области.

Мы рассмотрели локализованные распределения частиц, которые связаны с диффузией через границу de и abc (см. рис. 28). Поток частиц через границу db , обусловленный переходом отрицательно пролетных частиц в запертые, обсуждался в § 2.8. Этот поток не локализован, и выход частиц на стенку происходит по всей половине стенки. Пространственное рас-

пределение потока таких частиц зависит от решения задачи в области удержания, и в частности от распределения источника Q и коэффициента диффузии D .

Оценим теперь влияние ларморовского радиуса частиц. Распределение потока частиц может отличаться от распределения потока ларморовских центров (2.79), (2.81), (2.82), особенно в случае частиц с большой энергией, когда ларморовский радиус велик, а распределение узкое. Для того чтобы найти распределение потока частиц $\hat{\Phi}$, нужно связать координату выхода частицы $s = a\theta$ и ее ларморовского центра s_d . С точностью до членов порядка $\epsilon \rho_{\perp}^2/a$

$$s \simeq s_d + \left[2 \frac{V_{\text{др}v_{\perp}}}{\omega_{i0}^2} \frac{s}{a} (2\pi - \alpha) \right]^{1/2}.$$

Как и в § 2.5, примем равномерное распределение частиц по фазе ларморовского вращения α . В результате получим

$$\hat{\Phi}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \left(s - \left(2 \frac{V_{\text{др}v_{\perp}}}{\omega_{i0}^2} \frac{s}{a} \eta \right)^{1/2} \right) d\eta.$$

Как видно из последнего выражения, $\hat{\Phi}(s)$ оказывается сдвинутым относительно $\Phi(s)$ в сторону экваториальной плоскости на расстояние порядка

$$\left(\frac{2\pi V_{\text{др}v_{\perp}} \sqrt{V \xi_0}}{\omega_{i0}^2} \right)^{1/2} \simeq a \epsilon^{1/2} \xi_0^{1/4} \left(\frac{\rho_{\perp}}{a} \right)^{3/2}.$$

Даже для α -частиц с энергией в несколько мегаэлектрон-вольт эта величина значительно меньше характерной ширины распределения.

Точно так же можно показать, что в случае отрицательно пролетных частиц, выходящих вблизи внутреннего обвода камеры $R = R_{\text{min}}$, эффект конечности ларморовского радиуса приводит к смещению распределения от экваториальной плоскости.

Более существенную роль может играть нарушение аксиальной симметрии магнитного поля. Как будет показано ниже, при наличии возмущений магнитного поля траектория частицы может испытывать супербанановую прецессию с периодом, превышающим τ_b , что должно приводить к увеличению характерной ширины распределения потока частиц.

2.10. Функция распределения удерживаемых α -частиц с учетом конечной ширины орбит

Перейдем теперь к расчету функции распределения α -частиц в области удержания. Конечная ширина орбит α -частиц, составляющая в токамаке заметную долю малого радиуса плаз-

менного шнура, приводит к появлению неоклассических поправок к функции распределения, в том числе к анизотропии $p_{\parallel} \neq p_{\perp}$ и направленной скорости α -частиц — бутстрэп-току.

Для расчета функции распределения можно воспользоваться малостью параметра $\delta = \tau_b / \tau_s \ll 1$ и искать решение кинетического уравнения (2.21) с помощью хорошо известной процедуры [55] разложения f_{α} в ряд по δ : $f_{\alpha} = f_{\alpha}^0 + f_{\alpha}^1 \dots$

В нулевом приближении по δ

$$\partial f_{\alpha}^0 / \partial \psi = 0, \quad (2.83)$$

откуда следует, что

$$f_{\alpha}^0 = f_{\alpha}^0(p, v, v). \quad (2.84)$$

Для определения конкретного вида f_{α}^0 понадобится уравнение для поправки первого приближения:

$$-\frac{v^2(1+\chi^2)}{2\omega_{i0}R_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f_{\alpha}^1}{\partial \psi} = -\frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial t} + \text{St}(f_{\alpha}^0) + S^{\alpha}. \quad (2.85)$$

Интегрируя по ψ , получаем выражение для f_{α}^1 :

$$f_{\alpha}^1(p, v, v, \psi) = g(p, v, v) - \int_{\psi_{\min}}^{\psi} \left\{ -\frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial t} + \text{St}(f_{\alpha}^0) + S^{\alpha} \right\} \times \\ \times \frac{2\omega_{i0}R_0}{v^2(1+\chi^2)} \left| \frac{\partial z}{\partial \psi} \right| d\psi. \quad (2.86)$$

Здесь g — произвольная функция, которую можно определить только из следующего приближения по δ . Интегрирование в (2.86) проводится вдоль траектории частицы при фиксированных значениях p, v, v . Выражение (2.86) описывает функцию распределения в верхней половине тора ($z > 0$). Выполняя интегрирование (2.85) по нижней половине траектории $z < 0$, получаем

$$f_{\alpha}^1(p, v, v, \psi)|_{z < 0} = g + \int_{\psi_{\min}}^{\psi} \left\{ -\frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial t} + \text{St}(f_{\alpha}^0) + S^{\alpha} \right\} \times \\ \times \frac{2\omega_{i0}R_0}{v^2(1+\chi^2)} \left| \frac{\partial z}{\partial \psi} \right| d\psi. \quad (2.87)$$

В (2.87) учтено, что $\text{sign}(\partial z / \partial \psi) = \text{sign} z$. Очевидно, что в точке $\psi = \psi_{\max}$ (или $z = 0$) на траектории правые части (2.86), (2.87)

должны совпадать, откуда следует условие разрешимости уравнения (2.85):

$$\int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \left\{ -\frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial t} + \text{St} (f_{\alpha}^0) + S^{\alpha} \right\} \left| \frac{\partial z}{\partial \psi} \right| \frac{d\psi}{1 + \chi^2}. \quad (2.88)$$

Уравнение (2.88) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial t} = \langle \text{St} (f_{\alpha}^0) \rangle + \langle S^{\alpha} \rangle. \quad (2.89)$$

Угловые скобки в (2.89) означают

$$\langle F \rangle = \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \frac{F}{1 + \chi^2} \left| \frac{\partial z}{\partial \psi} \right| d\psi \bigg/ \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \left| \frac{\partial z}{\partial \psi} \right| \frac{d\psi}{1 + \chi^2}. \quad (2.90)$$

Рассмотрим энергичные α -частицы ($v \gg v_*$), для которых в интеграле столкновений можно пренебречь рассеянием и торможением на ионах плазмы. Для таких частиц уравнение (2.89) переходит в

$$\frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial t} = \left\langle \frac{1}{\tau_s} \right\rangle \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 f_{\alpha}^0 + \left\langle \frac{p - \psi}{\tau_s} \right\rangle \frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial p} + \langle S^{\alpha} \rangle. \quad (2.91)$$

Будем считать, что ток в плазме достаточно большой и радиальное отклонение траекторий α -частиц мало по сравнению с характерным размером неоднородности параметров плазмы. В этом случае неоднородность можно учесть, раскладывая $\tau_s(\psi)$ и $S^{\alpha} = Q(\psi)\delta(v - v_{0\alpha}) / (4\pi v_{0\alpha}^2)$ в ряд и оставляя лишь первую производную по ψ :

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q(\langle \psi \rangle) + Q'(\psi - \langle \psi \rangle); \\ \frac{1}{\tau_s} &= \frac{1}{\tau_s(\langle \psi \rangle)} - \frac{\tau_s'}{\tau_s^2}(\psi - \langle \psi \rangle). \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

Значение $\langle \psi \rangle$ определяется равенством (2.90), $Q' = dQ/d\psi$. Подставляя разложение (2.92) в уравнение (2.91), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial t} &= \frac{1}{\tau_s(\langle \psi \rangle)} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 f_{\alpha}^0 + \left\{ \frac{p - \langle \psi \rangle}{\tau_s(\langle \psi \rangle)} + \frac{\tau_s'}{\tau_s^2} (\langle \psi^2 \rangle - \langle \psi \rangle^2) \right\} \frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial p} + \\ &+ \frac{Q(\langle \psi \rangle)}{4\pi v_{0\alpha}^2} \delta(v - v_{0\alpha}). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Уравнение (2.93) отличается от (1.31), описывающего функцию распределения в однородной плазме, наличием дополнительного слагаемого, связанного с изменением обобщенного импульса p в процессе торможения. Первое слагаемое в фигурных скобках

описывает изменение p за счет уменьшения скорости частицы, второе — за счет дрейфовывания частицы из-за неоднородности силы трения. Например, для запертых частиц $\langle \psi \rangle \simeq p$, и поэтому в однородной плазме точки отражения у банана при торможении практически не смещаются по радиусу, уменьшается лишь ширина банана. В неоднородной плазме ($\tau'_s \neq 0$) вместе с сужением банана происходит его смещение по ψ в сторону уменьшения τ_s . Однако полное смещение за время торможения не превышает начальную ширину банана.

В уравнении (2.93) не учитывалось вихревое электрическое поле, которое всегда существует в токамаке и служит для поддержания плазменного тока. Под действием такого поля происходит пинчевание α -частиц, так же как и частиц основной плазмы. Скорость пинчевания можно оценить, интегрируя радиальный компонент дрейфовой скорости по периоду движения частицы по траектории

$$\Delta r = \oint V_{др, p} dt = \oint V_{др, p} d\theta / \dot{\theta}, \quad (2.94)$$

где θ — угол вдоль малого обхода тора. При круглых магнитных поверхностях $\dot{\theta} \simeq v_{||} / (qR)$ и, следовательно,

$$V_{др}^b = \frac{\Delta r}{\tau_b} \simeq V_{др} \oint \frac{\sin \theta d\theta}{v_{||}} / \oint \frac{d\theta}{v_{||}}.$$

При отсутствии электрического поля траектория симметрична относительно экваториальной плоскости, и поэтому $V_{др}^b = 0$. Электрическое поле нарушает такую симметрию, поскольку при движении по банановой траектории вдоль поля частица набирает энергию. Действительно, для сильнозапертых частиц ($\theta \ll 1$) имеем

$$v_{||}^2 \simeq v_{||0}^2 - \frac{v_{\perp 0}^2 \epsilon}{2} \theta^2 + \frac{2eE_{||}}{m} qR\theta,$$

и, следовательно, центр банановой траектории смещен по азимуту на $\Delta \theta = 2eE_{||}qR / (mv_{\perp}^2 \epsilon)$, а скорость дрейфа банана равна

$$V_{др}^b = V_{др} \Delta \theta = cE_{||} / B_{\theta} = cU / (2\pi RB_{\theta}),$$

где $B_{\theta} = 2J_p / (ca)$ — полоидальное поле плазменного тока; U — напряжение на обходе шнура. Полное смещение α -частиц за время торможения Δr_E можно оценить следующим образом:

$$\frac{\Delta r_E}{a} = \frac{v_{др}^b \tau_s}{a} \simeq \frac{r^2 U \tau_s}{4\pi R J_p} \simeq 2 \frac{\tau_s}{\tau_{sk}} \ll 1,$$

где $\tau_{sk} = c^2 / (4\pi\sigma a^2)$ — скиновое время; σ — электропроводность плазмы. В условиях реактора-токамака последнее отношение настолько мало, что смещение меньше ширины банана.

Найдем теперь функцию распределения α -частиц f_α^0 в локальном приближении на магнитной поверхности $\psi = \psi_1$. Будем считать, что ширина банана $\Delta\psi_b$ мала по сравнению с малым радиусом плазмы ψ_G ($\Delta\psi_b/\psi_G \ll 1$), и разложим τ_s и Q в ряд в окрестности $\psi = \psi_1$. Тогда уравнение (2.91) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_s(\psi_1)} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 j_\alpha^0 - \frac{\tau_s'(\psi_1)}{\tau_s^2(\psi_1)} (\langle\psi\rangle - \psi_1) \frac{1}{v^2} \frac{\partial v^3 f_\alpha^0}{\partial v} + \left\{ \frac{p - \langle\psi\rangle}{\tau_{s0}} - \right. \\ & \left. - \frac{\tau_s'}{\tau_s^2} (p \langle\psi\rangle - \psi_1 \langle\psi\rangle - \langle\psi^2\rangle - p\psi_1) \right\} \frac{\partial f_\alpha^0}{\partial p} + \frac{Q(\psi_1)}{4\pi v^2} \delta(v - v_{0\alpha}) + \\ & \quad + \frac{Q'(\langle\psi\rangle - \psi_1)}{4\pi v^2} \delta(v - v_{0\alpha}). \end{aligned}$$

Будем искать решение разложением в ряд по параметру $\Delta\psi_b/\psi_G$:

$$j_\alpha^0 = \frac{Q(\psi_1) \tau_s(\psi_1)}{4\pi v^3} \theta(v_{0\alpha} - v) + F. \quad (2.95)$$

Первое слагаемое соответствует функции распределения α -частиц в однородной плазме, а поправку F можно определить, подставляя (2.95) в (2.94) и оставляя члены первого порядка малости:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 F - \langle\psi - p\rangle \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{(Q\tau_s)'}{4\pi v^2} [\langle\psi - p\rangle + \\ & \quad + p - \psi_1] \delta(v - v_{0\alpha}) = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Будем считать, так же как и в § 2.9, что магнитные поверхности представляют собой круглые концентрические окружности. Тогда

$$z^2 = \rho^2(\psi) - (R - R_0)^2; \quad \frac{dz}{d\psi} = \frac{\rho}{z} \frac{d\rho}{d\psi}, \quad (2.97)$$

а усреднение (2.90) будет выглядеть следующим образом:

$$\langle\psi - p\rangle = \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \frac{(\psi - p) \rho' d\psi}{(1 + \chi^2) z} \bigg/ \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \frac{\rho' d\psi}{(1 + \chi^2) z}. \quad (2.98)$$

Вынося в (2.98) слабо меняющиеся параметры за знак интеграла, получим с точностью до $\Delta\psi_b/\psi_G$:

$$\langle \psi - p \rangle = \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \frac{(\psi - p) d\psi}{[(\psi - \psi_2)(\psi_1 - \psi)(\psi - \psi_3)(\psi - \psi_4)]^{1/2}} \bigg/ \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \frac{d\psi}{[(\psi_1 - \psi)(\psi - \psi_2)(\psi - \psi_3)(\psi - \psi_4)]^{1/2}}. \quad (2.99)$$

Значения $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ соответствуют корням уравнения $z(\psi) = 0$ (см. рис. 30) и даются с требуемой точностью выражениями (2.67), в которых R_{\max} необходимо заменить на $R_0 + \rho(\psi_1)$, а $R_G(1 - \chi^2_G)$ на v . В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= p + vR_0g_+; & \psi_2 &= p - vR_0g_+; \\ \psi_3 &= p + vR_0g_-; & \psi_4 &= p - vR_0g_-, \end{aligned} \right\} \quad (2.100)$$

где $g_{\pm} = (1 \pm \varepsilon)^{1/2}(1 \pm \varepsilon - v/R_0)^{1/2}$; $\varepsilon = \rho(\psi_1)/R_0$. Теперь выражение (2.99) можно переписать в виде

$$\langle \psi - p \rangle = R_0 v G_1(v), \quad (2.101)$$

где

$$G_1(v) = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{x dx}{(g_+^2 - x^2)^{1/2} (x^2 - g_-^2)^{1/2}} \bigg/ \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{dx}{(g_+^2 - x^2)^{1/2} (x^2 - g_-^2)^{1/2}}; \quad (2.102)$$

$$a_{\max} = (\psi_{\max} - p) / (R_0 v); \quad a_{\min} = (\psi_{\min} - p) / (R_0 v).$$

Возвращаясь к (2.96), получаем уравнение

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 F - R_0 v G_1(v) \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{(Q\tau_s)'}{4\pi v^2} [R_0 v G_1(v) + p - \psi_1] \delta(v - v_{0\alpha}) = 0,$$

решением которого будет функция

$$F = \frac{(Q\tau_s)'}{4\pi v^3} (p + R_0 v G_1(v) v - \psi_1) \theta(v_{0\alpha} - v),$$

$$\text{где } \theta(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0; \\ 0; & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $v < v_{0\alpha}$

$$j_{\alpha}^0 = \frac{Q\tau_s}{4\pi v^3} + \frac{(Q\tau_s)'}{4\pi v^2} (R_0 v G_1(v) - R\chi). \quad (2.103)$$

Как видно из (2.102), для запертых частиц, у которых $v > (1 - \varepsilon)R$, а

$$|\chi| < (1 - (1 - \varepsilon)R_0/R)^{1/2}, \quad (2.104)$$

в используемом приближении $G(v)=0$. Для положительно пролетных ($\psi_{\max} - p)/(R_0 v) = g_+$, ($\psi_{\min} - p)/(R_0 v) = g_-$ и из (2.102) следует

$$G_1(v) = \pi g_+ / (2K(\kappa)), \quad (2.105)$$

где $\kappa = \sqrt{g_+^2 - g_-^2} / g_+$. Для отрицательно пролетных частиц выражение для $G_1(v)$ отличается лишь знаком. На рис. 33 приведена зависимость поправки F к функции распределения от χ при $R=R_0$. Как ясно из предыдущего вывода, причина анизотропии у функции распределения — неоднородность источника и силы трения. В частности, анизотропия возникает из-за того, что частицы с разными продольными скоростями приходят в данную точку из разных областей плазмы, где скорость их рождения различна.

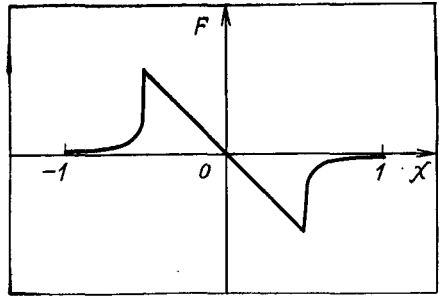


Рис. 33. Зависимость поправки к функции распределения $F = F \cdot 4\pi v^2 / [(Q\tau_s)' R_0]$ от χ для периферийной магнитной поверхности в точке $R=R_0$, $\psi=\psi_1$, $\rho(\psi_1)/R_0=0,25$

2.11. Бутстрэп-ток, создаваемый α -частицами

С помощью функции распределения можно вычислить бутстрэп-ток, который возникает из-за наличия направленной скорости у α -частиц [56]:

$$j_{\parallel} = e_{\alpha} \int i_{\alpha}^0 v_{\parallel} d^3v = \frac{e_{\alpha} (Q\tau_s)' R_0 v_{0\alpha}^2}{2} \int_0^1 \left(G_1(v) - \chi \frac{R}{R_0} \right) \chi d\chi. \quad (2.106)$$

Плотность энергичных α -частиц ($v > v_*$) определяется первым слагаемым в выражении (2.103): $n_{\alpha} = Q\tau_s \ln(v_{0\alpha}/v_*)$. С помощью этого выражения равенство (2.106) можно переписать в виде

$$j_{\parallel \alpha} = -\frac{c}{B_0} \frac{\epsilon_{0\alpha}}{\ln(v_0/v_*)} \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^{3/2} \frac{dn_{\alpha}}{d\rho} L \left(\frac{\rho}{R} \right), \quad (2.107)$$

где $L(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^{3/2}} \int_0^1 \left(\frac{R}{R_0} \chi - G_1 \right) \chi d\chi \approx 1$.

Выражение (2.107) правильно оценивает величину тока α -частиц в средней части плазменного шнура. Вблизи от магнитной оси становятся неприменимыми формулы (2.100), на которых

основано решение кинетического уравнения. Вблизи от границы плазмы необходимо учитывать потери α -частиц на стенку. Поэтому эти две области требуют специального исследования.

Рассмотрим сначала приосевую область [57], размер которой определяется характерной шириной орбиты приосевых частиц (2.14) $\rho/a \ll (4\epsilon/\beta^2)^{1/3}$, где $\beta = \psi_G / (R_0 v)$. Так как в условиях реактора эта область составляет малую часть плазменного шнура, то распределение тока в ней можно считать однородным. Тогда запертым частицам на магнитной оси соответствуют значения χ , равные $-(3/2)(\epsilon/2\beta^{1/2})^{2/3} < \chi < 0$, а значения $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ можно точно определить из уравнений для дрейфовой траектории. Это позволяет рассчитать анизотропную поправку к функции распределения f_{α}^0 .

Оценим теперь бутстрэп-ток α -частиц на магнитной оси. Вклад в него дают в основном запертые частицы, плотность которых $n_{\alpha t} \simeq n_{\alpha} \Delta\chi \simeq n_{\alpha} \epsilon^{2/3} \beta^{-1/3}$, поэтому имеем

$$|j_{\parallel\alpha}| \simeq e_{\alpha} v_{\parallel} \frac{dn_{\alpha t}}{d\psi} \Delta\psi \simeq e_{\alpha} v_{0\alpha} \frac{\epsilon^2}{\beta^2} \psi_G \frac{dn_{\alpha}}{d\psi}.$$

Более точные расчеты [57] дают в последней формуле численный коэффициент, что приводит к выражению:

$$j_{\parallel\alpha} = -0.17 \frac{e_{\alpha} v_{0\alpha}}{\ln(v_{0\alpha}/v_{*})} \frac{\epsilon^2}{\beta^2} \psi_G \frac{dn_{\alpha}}{d\psi}. \quad (2.108)$$

Формальное использование формулы (2.107) на магнитной оси $\rho=0$ дает $j_{\parallel\alpha} = 0$. Однако формула (2.108), полученная в результате более аккуратного рассмотрения приосевой области, показывает, что бутстрэп-ток на оси не обращается в нуль, а лишь уменьшается до величины

$$j_{\parallel\text{ось}} \simeq \frac{\rho_{\text{л}q}}{a\epsilon^{1/2}} j_{\parallel\alpha}. \quad (2.108a)$$

Рассмотрим теперь область вблизи стенки, где анизотропия функции распределения увеличивается из-за дрейфовых потерь частиц [58—60]. Ширина этой пристеночной области равна отклонению дрейфовой траектории от магнитной поверхности и поэтому мала при больших токах плазмы, характерных для реактора ($J_p > 5.4\epsilon^{1/2}$ МА).

Обозначим χ_{max} , χ_{min} границы конуса потерь, из которого α -частицы, родившиеся в пристеночной области, теряются на стенку. Конус потерь существует лишь при скорости частицы больше некоторой критической v_c . Однако поскольку рассеяние частиц на электронах мало, конус потерь остается пустым ($f_{\alpha} = 0$ при $\chi_{\text{min}} < \chi < \chi_{\text{max}}$) вплоть до скоростей $v = v_*$, где существенно рассеяние на ионах плазмы. Поэтому при вычислении

тока α -частиц можно ограничиться областью $v > v_*$, в которой функция распределения вне конуса потерь $f_\alpha \sim 1/v^3$. В результате с точностью до $v_*/v_{0\alpha}$ получим

$$j_{\parallel\alpha} = \frac{Z_\alpha e v_{0\alpha} Q_\alpha \tau_s}{4} (\chi_{\max}^2 - \chi_{\min}^2). \quad (2.109)$$

Поскольку из плазмы теряются в основном запертые частицы, то по порядку величины $\chi_{\max}^2 - \chi_{\min}^2 \simeq \varepsilon$. Ток (2.109) распределен неравномерно по магнитной поверхности и поэтому имеет смысл среднее значение тока

$$\langle j_{\parallel\alpha} \rangle = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} j_{\parallel\alpha} d\theta = \frac{Z_\alpha e v_{0\alpha} Q_\alpha \tau_s}{4} \langle \chi_{\max}^2 - \chi_{\min}^2 \rangle. \quad (2.110)$$

На рис. 34 показана зависимость $\langle \chi_{\max}^2 - \chi_{\min}^2 \rangle$ от $\Delta = \sqrt{2/\varepsilon} (1 - \rho/a) \tilde{I}$, где $\tilde{I} = J_p/2,7$, полученная в [58] для случая однородного плазменного тока. Распределение пристеночного тока α -частиц по радиусу плазмы зависит от радиальных распределений плотности и температуры плазмы. В [58] полный ток α -частиц (МА), возникающий из-за дрейфовых потерь, рассчитан для $Q_\alpha \tau_s = Q_{\alpha 0} \tau_{s0} (1 - \rho^2/a^2)^k$:

$$J_\alpha = 10^{-16} Q_{\alpha 0} \tau_{s0} a^2 \varepsilon (V \sqrt{2\varepsilon} / \tilde{I})^{k+1} C_k. \quad (2.111)$$

Здесь C_k — численный множитель порядка 1 ($C_0 = 4$; $C_2 = 2,5$; $C_{4,5} = 3,55$). Формула (2.111) получена в предположении, что стенка расположена на границе плазмы. В этом случае ток α -частиц течет в ту же сторону, что и ток в плазме.

Оценим бутстрэп-ток α -частиц в реакторе-токамаке:

$$j_{\parallel\alpha} / j_{\parallel p} \simeq \varepsilon^{3/2} 2\pi n_\alpha \varepsilon_{0\alpha} / B_\theta^2 < \varepsilon^{3/2} \beta_p. \quad (2.112)$$

Здесь $\beta_p = 8\pi p / B_\theta^2$ — полоидальное значение параметра β . Так как в токамаке $\beta_p \ll 1$, бутстрэп-ток при большом значении плазменного тока составляет малую часть тока плазмы.

На краю бутстрэп-ток возрастает, но не сильно. Как видно из сравнения (2.109) и (2.107),

$$j_{\parallel\text{ст}} / j_{\parallel\alpha} \simeq (1/2) (a/\rho_\perp) \varepsilon^{1/2} / q,$$

что в условиях реактора ($a/\rho_\perp = 20$; $q = 3$; $\varepsilon = 0,25$) дает

$$j_{\parallel\text{ст}} / j_{\parallel\alpha} = 1,7.$$

Существует любопытная возможность усилить бутстрэп-ток в токамаке с малым значением плазменного тока и плохим удержанием α -частиц, и как следствие — осуществить в нем

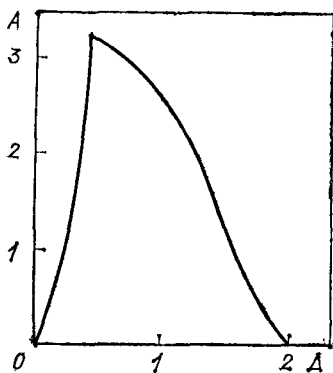


Рис. 34. Зависимость $\langle \chi_{\max}^2 - \chi_{\min}^2 \rangle$ от расстояния до стенки $\Delta = \pi \langle \chi_{\max}^2 - \chi_{\min}^2 \rangle / \varepsilon$,
 $\Delta = \sqrt{2/\varepsilon} (1 - \rho/\alpha) \tilde{I}$, $\tilde{I} = J_p / 2,7$

полностью самоподдерживающуюся реакцию с высокой температурой и плазменным током, поддерживаемым α -частицами [61].

Обратимся к рис. 17, на котором изображено максимальное отклонение дрейфовой траектории для частиц, родившихся на магнитной оси. При малом токе $J_p <$

$5,4\varepsilon^{1/2}$ МА часть частиц уходит на стенку и в плазме остаются два встречных пучка α -частиц. Частицы, движущиеся вдоль тока ($\chi > 0$), и запертые частицы отклоняются в сторону внешнего обвода, а отрицательно пролетные частицы — в сторону внутреннего обвода камеры. Поэтому, смещая плазменный шнур по большому радиусу относительно центра камеры или используя специальные диафрагмы (рис. 35), можно регулировать суммарную направленную скорость α -частиц, оставшихся в плазме. При очень малых токах $J_p < 2,7\varepsilon$ МА в плазме перестают удерживаться и пролетные частицы. Как известно, направленный пучок α -частиц, который образуется в плазме при $2,7\varepsilon < J_p < 5,4\varepsilon^{1/2}$ МА, вызывает появление дополнительного электронного тока за счет силы трения электронов о движущиеся α -частицы [62]. Суммарный ток равен

$$j_{\Sigma} = j_{\parallel \alpha} (1 - Z_{\alpha} / Z_{ef}),$$

где Z_{ef} — эффективный заряд ионов плазмы. Из последнего выражения видно, что в чистой дейтериево-третиевой плазме с

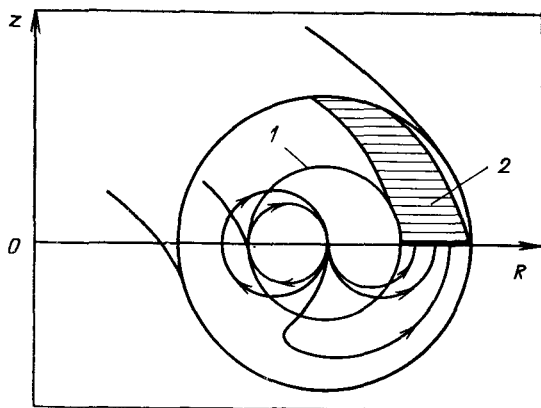


Рис. 35. Смещение плазменного шнура 1 или использование диафрагмы 2, можно регулировать направленную скорость α -частиц в токамаке с малым током $2,7\varepsilon < J_p < 5,4\varepsilon^{1/2}$ МА. Стрелками отмечены траектории α -частиц, родившихся на оси

$Z_{\text{eff}}=1$ для поддержания плазменного тока ток α -частиц должен быть направлен против плазменного тока. Для этого нужно использовать диафрагму так, как это показано на рис. 35. Максимальный ток достигается при $J_p=2,7\epsilon$ (в МА), при котором в плазме удерживаются только частицы с $-1 < \chi < \chi_{\text{max}} = -0,526 - 0,566\epsilon$. Часть этих частиц выходит за границу шнура, и поэтому со стороны внутреннего обвода стенка должна быть удалена от плазмы на расстояние $\Delta a \simeq 1,65 - A^{-1}$. Оценим полный плазменный ток, создаваемый α -частицами в этом случае:

$$\frac{J_\alpha}{J_p} \simeq \pi a^2 e_\alpha n_\alpha v_{\parallel \alpha} \simeq \pi a^2 e_\alpha Q \tau_s v_{0\alpha} (1 - \chi_{\text{max}}^2) J_p^{-1}.$$

Если выразить плотность плазмы через β_p , то получим

$$\frac{J_\alpha}{J_p} \simeq \frac{e_\alpha J_p r_{0\alpha} \beta_p}{4c^2} (1 - \chi_{\text{max}}^2) \frac{n \langle \sigma v \rangle \tau_s}{T}.$$

Как видно из последней оценки, отношение J_α/J_p сильно зависит от температуры и достигает максимума при $T \simeq 100$ кэВ, при которой $J_\alpha/J_p \simeq 1$. Однако в условиях токамака такая температура невозможна из-за мощного циклотронного излучения плазмы. Более аккуратные оценки, выполненные в [61], показывают, что при реально достижимой температуре $T \simeq 30$ кэВ отношение J_α/J_p не превосходит 0,33. Однако это значение оказывается достаточным для того, чтобы ток α -частиц мог служить затравочным для бутстрэп-эффекта, возникающего при подпитке реактора топливом.

Приведенные результаты получены в локальном приближении $\Delta\psi_b/\psi_G \ll 1$. В том случае, когда ширина орбиты составляет заметную долю малого радиуса плазменного шнура, усреднение коэффициентов, входящих в уравнение, можно выполнить лишь с помощью численных методов. Пример подобных расчетов с описанием численного кода приведен в [63]. Расчеты выполнены с учетом реальной геометрии магнитного поля для установки реакторного масштаба $J_p > J_{ph}$. Поэтому эффекты конечной ширины орбит малы и проявляются в основном на периферии плазменного шнура, где велики градиенты источника частиц $Q(\psi)$.

Иная ситуация при малых токах, например, в токамаке ТСП [22], в котором высокие параметры будут достигнуты с помощью адиабатического сжатия дейтериево-третиевой плазмы. При небольшом токе, характерном для этой установки, $J_p = 1,2$ МА, ширина банана α -частиц сравнима с малым радиусом плазмы, и поэтому неклассические эффекты будут проявляться особенно сильно. На рис. 36 показаны основные характеристики функции распределения α -частиц, рассчитанные для условий ТСП ($R_0 = 42$ см, $a = 12$ см, $J_p = 1,2$ МА) [50]. Учтены

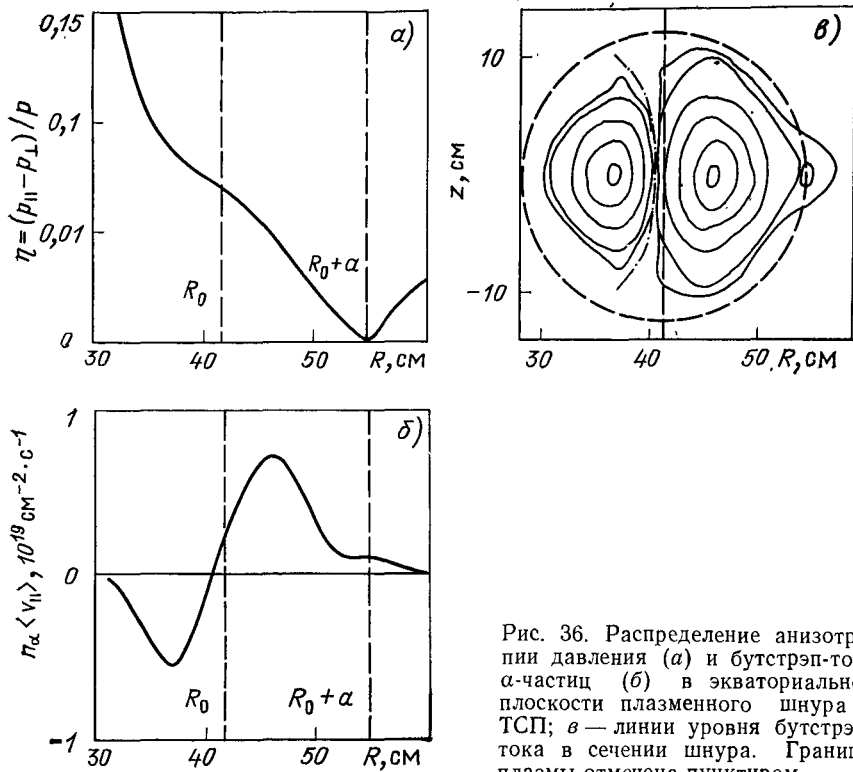


Рис. 36. Распределение анизотропии давления (а) и бутстрэп-тока α -частиц (б) в экваториальной плоскости плазменного шнура в ТСП; в — линии уровня бутстрэп-тока в сечении шнура. Граница плазмы отмечена пунктиром

валась реальная форма первой стенки, которая в конечном сжатом состоянии расположена на большом расстоянии от внешнего обвода плазмы. Поэтому часть α -частиц удерживается вне плазмы при $R > R_0 + \alpha$. На рис. 36, в показаны линии уровня бутстрэп-тока в сечении плазмы. Несмотря на то что ширина банана сравнима с размером плазмы, значение бутстрэп-тока хорошо совпадает с оценками (2.108), (2.108а).

2.12. Псевдодиффузия α -частиц

Вычислим теперь с помощью дрейфового кинетического уравнения (2.21) неоклассический поток α -частиц в локальном приближении. Локальное приближение означает, что радиальная ширина дрейфовой орбиты мала по сравнению с характерным размером неоднородности плазмы и поэтому в выражении для потока частиц можно оставить лишь слагаемые, пропорциональные первой производной от плотности α -частиц. Общее

выражение для потока частиц можно записать следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha} = \iint i_{\alpha}(\mathbf{v}, \mathbf{r}) (\mathbf{V}_{др} \cdot d\mathbf{s}) d^3\mathbf{v}/S, \quad (2.113)$$

где интегрирование проводится по скоростям и по магнитной поверхности $\psi = \text{const}$, площадь которой S .

Сразу видно, что усредненная функция распределения f_{α}^0 в локальном приближении не дает вклада в выражение для потока частиц. Дрейф бананов, связанный с неоднородностью силы трения, как видно из уравнения (2.93), приводит к потоку частиц, пропорциональному произведениям $n'_e n'_{\alpha}$ и $T'_e n'_{\alpha}$, и поэтому из-за малости должен быть отброшен. Это означает, что в рассматриваемом приближении центры дрейфовых траекторий неподвижны в процессе охлаждения, и для вычисления потока α -частиц мы должны воспользоваться следующим приближением по малому параметру τ_b/τ_s (2.86). Но сначала оценим поток частиц и выясним его физический смысл.

Если источник частиц Q неоднороден по радиусу плазмы $Q = Q_0 + Q'(\psi - \psi_1)$, то в следующем порядке приближения по параметру τ_b/τ_s плотность α -частиц уже не будет постоянной на траектории. Будем считать, что $\tau_s = \text{const}$, и рассмотрим трубку, образованную замкнутыми дрейфовыми траекториями, которая пересекает магнитную поверхность $\psi = \psi_1$ в двух точках (1 и 2, рис. 37). Если мощность источника слева от магнитной поверхности больше, чем справа, то плотность α -частиц в точке 1 будет больше, чем в точке 2, на $\delta n \simeq \Delta Q \tau_b \simeq -(dQ/dr) \Delta r_b \tau_b$, где Δr_b — радиальный размах дрейфовой траектории. Соответственно вариация плотности запертых частиц, которые дают основной вклад в поток, δn_l будет равна: $\delta n_l \simeq -\epsilon^{1/2} \Delta r_b \tau_b dQ/dr$.

Учитывая, что нормальная к магнитной поверхности составляющая скорости частицы $v_n \simeq V_{др}$, получаем

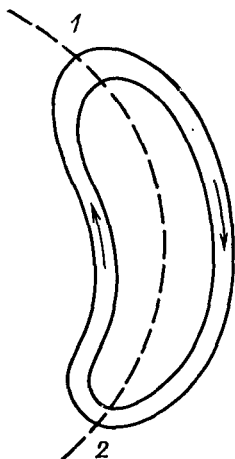
$$\Gamma_{\alpha} \simeq \delta n_l V_{др} \simeq -\epsilon^{1/2} \Delta r_b^2 \frac{dQ}{dr} \simeq -\frac{q^2 \epsilon_{0z}}{\epsilon \omega_{i0}^2 m_{\alpha}} \frac{dQ}{dr}. \quad (2.114)$$

Решение кинетического уравнения [56] дает более точное выражение

$$\Gamma_{\alpha} = -0,53 \frac{q^2 \epsilon_{0\alpha}}{\omega_{i0}^2 \epsilon m_{\alpha} \tau_s} \frac{d(Q\tau_s)}{dr} = -0,53 \frac{q^2 \epsilon_{0\alpha}}{\epsilon \omega_{i0}^2 m_{\alpha} \tau_s \ln(v_{0\alpha}/v_*)} \frac{dn_{\alpha}}{dr}. \quad (2.115)$$

Коэффициент, стоящий в выражении для потока перед производной от плотности, имеет размерность коэффициента диффузии, но это не истинный диффузионный процесс, обязанный случайным блужданиям частиц, а скорее кинематический эффект, связанный с размешиванием неоднородного источника

Рис. 37. Трубка дрейфовых траекторий пересекает магнитную поверхность $\psi = \psi_1$ (пунктир) в точках 1 и 2. Направление движения частиц показано стрелками



при движении частиц по дрейфовой траектории. Такой поток частиц не приводит к дополнительным потерям частиц на стенку, так как ведущий центр дрейфовой орбиты остается неподвижным в процессе торможения частицы. В этом смысле псевдодиффузионный поток α -частиц (2.115) напоминает обтекающий диамагнитный ток в неоднородной плазме. Однако если дивергенция диамагнитного тока всегда равна нулю, то для псевдодиффузионного потока $\text{div } \Gamma \neq 0$. В стационарном случае баланс плотности α -частиц обеспечивается наличием стока — превращения при охлаждении α -частиц в «золу», т. е. тепловой компонент, который обычно рассматривается отдельно от энергичных α -частиц.

В заключение обсудим некоторые физические явления, связанные с наличием в плазме энергичных α -частиц.

Функция распределения α -частиц, а следовательно, и их плотность не постоянны на магнитных поверхностях [2]. Следовательно, эквипотенциальные поверхности не совпадают с магнитными:

$$\varphi = (T_e/e) \ln(1 + Z_\alpha \tilde{n}_\alpha / n_e),$$

где \tilde{n}_α — переменная составляющая плотности на магнитной поверхности. Внутри плазмы полоидальное электрическое поле очень мало из-за малой плотности α -частиц ($n_\alpha/n_e \approx 10^{-2} \div 10^{-4}$). Однако на краю плазмы может образовываться «шуба» из гелиевой плазмы с высокоэнергетическими немаксвелловскими ионами. Например, это явление может проявиться в токамаке ТСП [22], в котором в конечной стадии сжатой плазмы стенка находится далеко от плазменного шнура. В плазме удерживаются и те α -частицы, часть дрейфовой траектории которых лежит вне плазменного шнура. В этой внешней области, в которой плотность частиц составляет 10^{11} см^{-3} , а силовые линии выходят на стенку, удержание электронов электростатическое. Это может привести к изменению распределения электрических полей в пристеночной области и, как следствие, к изменению взаимодействия плазмы со стенкой.

Оценим теперь амбиполярное электрическое поле, которое возникает в токамаке из-за потерь энергичных α -частиц. Плот-

ность радиального электрического тока, выносимого из плазмы α -частицами, уходящими на стенки, равна

$$j_{\alpha} = e_{\alpha} \bar{Q}_{\alpha} \frac{a}{2} (1 - K_{\alpha}) = \frac{e_{\alpha} n_{\alpha} a}{2 \tau_s} (1 - K_{\alpha}). \quad (2.116)$$

Здесь \bar{Q}_{α} — средняя по радиусу мощность источника α -частиц; K_{α} — их коэффициент удержания. Радиальный электрический ток α -частиц приводит к накоплению в плазме отрицательного заряда и вращению плазмы в результате дрейфа в радиальном электрическом поле. Как известно [64], продольная вязкость препятствует вращению плазмы в токамаке в полоидальном направлении, поэтому под действием электрического поля плазменный шнур вращается в тороидальном направлении со скоростью

$$V_{\varphi} = c E_{\rho} / B_{\theta}. \quad (2.117)$$

Скорость V_{φ} можно определить из тороидальной проекции уравнения баланса импульса основной плазмы:

$$0 = j_{\rho} B_{\theta} / c - m_i n V_{\varphi} / \tau_M. \quad (2.118)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (2.118) феноменологически описывает затухание тороидального вращения, которое наблюдается в экспериментах на токамаках с инжекцией нейтральных пучков.

В стационарных условиях $j_{\rho} = -j_{\alpha}$ и, следовательно,

$$V_{\varphi} = -j_{\alpha} B_{\theta} \tau_M / (c m_i n).$$

Подставляя в последнее выражение ток α -частиц (2.116), получаем

$$\frac{V_{\varphi}}{v_{Ti}} = \frac{Z_{\alpha}}{2} \left(\frac{n_{\alpha}}{n} \right) \left(\frac{\tau_M}{\tau_s} \right) (1 - K_{\alpha}) \left(\frac{\varepsilon}{q} \right) \left(\frac{a}{\rho_L} \right), \quad (2.119)$$

где v_{Ti} — тепловая скорость ионов плазмы. В условиях полномасштабного реактора-токамака ($\varepsilon = 0,3$, $q = 3$, $T = 20$ кэВ, $n = 10^{14}$ см $^{-3}$, $K_{\alpha} = 0,9$, $a = 150$ см, $B = 5$ Тл)

$$V_{\varphi} / v_{Ti} = 2,5 (n_{\alpha} / n) \tau_M / \tau_s. \quad (2.120)$$

Для токамака ТСП ($T = 7$ кэВ, $n = 10^{15}$ см $^{-3}$, $K_{\alpha} = 0,7$, $a = 12$ см, $B = 12$ Тл)

$$V / v_{Ti} = 2,4 (n_{\alpha} / n) \tau_M / \tau_s. \quad (2.121)$$

В настоящее время окончательно не выяснено, какой механизм отвечает за торможение тороидального вращения плазмы в то-

камаке. Однако в современных экспериментах τ_M оказывается небольшим ($\tau_M = \tau_E \gg \tau_s$). Как видно из (2.120) и (2.121), при таком затухании тороидального импульса ток α -частиц легко компенсируется радиальным током плазмы уже при малой скорости вращения и соответственно [см. (2.117)] малом электрическом поле.

Глава 3

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА УДЕРЖАНИЕ α -ЧАСТИЦ В ТОКАМАКЕ

3.1. Характерные частоты невозмущенного движения α -частиц

В токамаке на фоне основного симметричного поля всегда существуют аксиально-несимметричные возмущения, связанные с развитием в плазме различного рода неустойчивостей, в том числе и крупномасштабных МГД-возмущений, а также с конструкцией тороидального магнита (гофрировка). Как показали исследования последних лет, такие малые возмущения могут приводить к заметному ухудшению удержания α -частиц.

При рассмотрении динамики α -частиц в аксиально-симметричном поле было достаточно исследовать интегралы движения частиц. Характер движения α -частиц во времени не играл существенной роли, поскольку время не входит явным образом в выражения для p , ϵ и v . При наличии возмущений временной характер движения частиц становится важным.

Движение частиц в токамаке характеризуется тремя основными частотами: частица быстро вращается по ларморовской окружности с циклотронной частотой ω_i , совершает квазипериодическое движение вдоль силовых линий с частотой ω_b (для пролетных частиц ω_b определяется временем облета тора $\omega_b \simeq \simeq 2\pi R/v_{||}$) и дрейфует поперек магнитного поля, в результате чего ее траектория испытывает прецессию в тороидальном направлении с частотой ω_d . Частоты ω_b и ω_d могут быть определены в рамках дрейфовых уравнений движения.

В этой главе будем использовать простейшую модель магнитного поля с круглыми концентрическими магнитными поверхностями $B_\phi = B_T R_0/R$, $B_\theta = B_p(\rho) R_0/R$, где ρ — расстояние от магнитной оси $R = R_0 + \rho \cos \theta$, θ — угол вдоль полоидального обхода тора. Кроме того, положим, что скорость тороидального дрейфа $V_{др} = \text{const}$ и направлена вдоль оси z . В результате придем к стандартной модельной системе дрейфовых уравнений, правильно описывающей характер движения частиц в то-

камаке:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} &= -V_{др} \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= (v_{\parallel}/qR_0) - (V_{др}/\rho) \cos \theta; \\ \dot{\varphi} &= v_{\parallel}/R. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Здесь $q = \rho B_T / (R_0 B_p)$ — запас устойчивости, а продольная скорость v_{\parallel} должна быть выражена как функция от координат. Опуская малые слагаемые $\sim \varepsilon^2$, имеем

$$v_{\parallel}^2 = v^2 - \mu B = v_{\parallel 0}^2 [1 - \kappa^{-2} \sin^2(\theta/2)],$$

где $\kappa^2 = v_{\parallel 0}^2 / (2v_{\perp 0}^2 \varepsilon)$. В нулевом приближении по параметру ρ_{\perp}/R , которое можно получить, полагая в уравнении (3.1) $V_{др} = 0$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const}; \\ \varphi - q\theta &\equiv \varphi_0 = \text{const}; \\ \dot{\theta} &= \sigma (v_{\parallel 0}/qR_0) \sqrt{1 - (1/\kappa^2) \sin^2(\theta/2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Здесь $\sigma = \pm 1$ учитывает изменение знака продольной скорости у запертых частиц в точках отражения ($v_{\parallel} = 0$), а параметр φ_0 характеризует силовую линию на магнитной поверхности $\rho = \text{const}$, вдоль которой происходит движение частицы.

Интегрируя последнее уравнение по времени, легко получить, что для пролетных частиц ($\kappa > 1$)

$$\theta = 2am [1/\kappa, v_{\parallel 0} t / (2qR_0)], \quad (3.3)$$

где $am(z)$ — эллиптическая функция — амплитуда z [66]. У запертых частиц ($\kappa < 1$) движение по θ ограничено точками отражения $|\sin(\theta/2)| = \kappa$, поэтому для интегрирования (3.2) можно воспользоваться стандартной заменой переменных $(1/\kappa) \sin(\theta/2) = \sin \eta$, в результате чего имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= (v_{\parallel 0}/qR_0) \cos \eta; \\ \dot{\eta} &= [v_{\parallel 0} / [2qR_0 \kappa] \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \eta}]; \\ \eta &= am [\kappa, v_{\parallel 0} t / (2qR_0 \kappa)]; \\ \dot{\theta} &= (v_{\parallel 0}/qR_0) cn [v_{\parallel 0} t / (2qR_0 \kappa)], \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где $cn(z) = \cos(am(z))$.

При $\kappa \gg 1$ (сильнопролетные частицы) $\theta \simeq v_{\parallel 0} t / (qR_0)$, при $\kappa \ll 1$ (сильнозапертые) $\theta \simeq 2\kappa \sin(v_{\perp} \sqrt{\varepsilon} t / (\sqrt{2} qR_0))$. Определяя период движения и характерную частоту $T_b = \oint d\theta / \dot{\theta}$ и $\omega_b = 2\pi/T_b$, по-

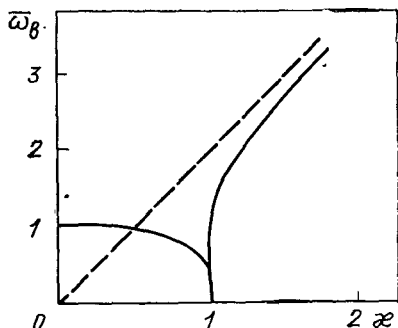


Рис. 38 Зависимость частоты продольных колебаний $\omega_b = \omega_b 2qR_0 \kappa / v_{\parallel 0}$ от $\kappa = v_{\parallel 0} / v_{\perp 0} \sqrt{2\varepsilon}$

лучаем для запертых с частиц ($\kappa < 1$)

$$\omega_b = \left(\frac{4qR_0 \kappa}{\pi v_{\parallel 0}} K(\kappa) \right)^{-1}, \quad (3.5)$$

где $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Для пролетных частиц ($\kappa > 1$)

$$\omega_b = \left(\frac{2qR_0}{\pi v_{\parallel 0}} K\left(\frac{1}{\kappa}\right) \right)^{-1}. \quad (3.6)$$

Зависимость $\omega_b(\kappa)$ изображена на рис. 38. Отметим, что вблизи от сепаратрисы $\kappa = 1$ частицы начинают задерживаться на внутреннем обводе тора, где магнитное поле мак-

симально, и поэтому $T_b \rightarrow \infty$, а фурье-разложения (3.3), (3.4) по времени содержат большое количество гармоник с частотами, кратными ω_b .

В следующем приближении по ρ_l/R частица сдрейфовывает с исходной силовой линии магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} &= -V_{др} \sin \theta; \\ \dot{\varphi}_0 &= \frac{q(\rho_0) V_{др}}{\rho_0} (\cos \theta + s(\rho_0) \theta \sin \theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

где $s = (\rho/q) dq/d\rho$ — шир магнитного поля. Скорость дрейфа вдоль большого обхода тора можно найти, усредняя второе уравнение (3.7) по периоду продольных колебаний:

$$\omega_d = (1/T_b) \int_0^{T_b} \dot{\varphi}_0 dt. \quad (3.8)$$

Переходя в (3.8) к интегрированию по θ , с помощью (3.2) получаем в случае запертых частиц ($\kappa < 1$):

$$\omega_d = \frac{qV_{др}}{\rho_0} \left\{ 4s(\kappa^2 - 1) + 2 \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} (1 + 2s) \right\}. \quad (3.9)$$

Для пролетных частиц

$$\omega_d = \frac{qV_{др}}{\rho_0} \left\{ 1 - 2\kappa^2 + 2\kappa^2 (1 + 2s) \frac{E(1/\kappa)}{K(1/\kappa)} - \frac{2\kappa^2 \pi \sqrt{1 - 1/\kappa^2}}{K(1/\kappa)} \right\}. \quad (3.10)$$

В последнем случае скорость дрейфа ω_d показывает, насколько вращательное преобразование дрейфовых траекторий q^* отли-

чается от вращательного преобразования силовых линий, характеризуемого q [67]: $q^* - q = \omega_d / \omega_b$. Будем рассматривать взаимодействие α -частиц с медленными возмущениями магнитного поля, частота которых ω не превышает дрейфовые частоты $\omega < \omega^* \simeq cT(eBa^2)$. В этом случае возмущения можно считать неподвижными, поскольку для энергичных α -частиц их частота колебаний ω меньше самой медленной характерной частоты:

$$\omega / \omega_d \simeq T / (qe_0\alpha) \ll 1.$$

3.2. Винтовые возмущения магнитного поля

Известно, что наличие одной моды винтового возмущения приводит к образованию островной структуры в окрестности резонансной магнитной поверхности $m - nq = 0$ [67]. При наличии многих мод острова могут перекрыться, и магнитные поверхности окажутся разрушенными. Это явление, по-видимому, лежит в основе аномальной электронной теплопроводности в токамаке. Однако при исследовании удержания α -частиц нужно следить за разрушением не магнитных, а дрейфовых поверхностей, которые, как видно из предыдущего рассмотрения, могут существенно отличаться от магнитных поверхностей.

Будем считать, что структура возмущений магнитного поля, так же как и равновесное магнитное поле, определяется основной плазмой, и рассмотрим сначала влияние одной винтовой МГД-моды на движение α -частиц. В качестве возмущения выберем одну винтовую гармонику

$$\tilde{\mathbf{B}} = -\frac{1}{2\pi R} [\nabla\tilde{\psi} \times \mathbf{e}_\varphi], \quad (3.11)$$

где $\tilde{\psi} = \pi a^2 B_T \tilde{\psi}(\rho) \cos(m\theta - n\varphi)$.

Радиальную зависимость $\tilde{\psi}(\rho)$ аппроксимируем следующей модельной функцией:

$$\tilde{\psi}(\rho) = \psi_0(\rho/a) \exp\{-(\rho - \rho_s)^2 / \Delta\rho^2\}. \quad (3.12)$$

Здесь ρ_s — радиус резонансной магнитной поверхности $m = nq(\rho_s)$. Для мелкомасштабных винтовых мод m , $n \gg 1$ ширина локализации возмущений $\Delta\rho = \rho_s/m$ [68] может оказаться меньше ширины банана. При малых значениях m область локализации возмущений сравнима с малым радиусом плазменного шнура, и поэтому (3.12) можно заменить на $\tilde{\psi} = \psi_0 \rho / a$.

Можно считать, что возмущение полоидального поля (3.11) не меняет абсолютное значение магнитной индукции $|B|$ и поэтому в уравнениях движения (3.1) появятся дополнительные

слагаемые, связанные лишь с искривлением силовых линий магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} &= -V_{др} \sin \theta + v_{\parallel} \tilde{B}_r / B; \\ \dot{\theta} &= \frac{v_{\parallel}}{qR_0} - \frac{V_{др}}{\rho} \cos \theta + \frac{v_{\parallel}}{\rho} \frac{\tilde{B}_\theta}{B}; \\ \dot{\varphi} &= v_{\parallel} / R. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Рассмотрим сначала пролетные частицы, траектории которых охватывают магнитную ось. Введем вместо ρ переменную $p(\rho, \theta)$ [см. (2.9)], которая для круглых магнитных поверхностей выражается через ρ и θ следующим образом:

$$p = \omega_{i0} \int_0^{\rho} \rho d\rho / q - v_{\parallel} (R_0 + \rho \cos \theta).$$

Вместо тороидального угла φ будем использовать фазу возмущений $\xi = m\theta - n\varphi$, а в качестве «времени» $\tau = \theta$. Тогда, комбинируя уравнения (3.13), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \omega_{i0} R_0 \rho \left(\frac{\tilde{B}_r}{B_T} + \frac{qV_{др} \sin \tau}{\epsilon v_{\parallel} - qV_{др} \cos \tau} \frac{\tilde{B}_\theta}{B_T} \right); \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= m - nq \frac{\epsilon v_{\parallel}}{\epsilon v_{\parallel} - qV_{др} \cos \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

В последнем уравнении опущены слагаемые, содержащие возмущения магнитного поля, поскольку они приводят к эффектам второго порядка малости по амплитуде возмущений. В правых частях уравнений (3.14) переменная p должна быть выражена через ρ и θ с помощью равенства (2.9).

Выделим теперь в уравнении для фазы ξ среднюю скорость дрейфа $d\xi/d\tau = \omega_u(p) + (\partial/\partial\tau)\tilde{f}(p, \tau)$,

где $\omega_u = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} (d\xi/d\tau) d\tau$; $\tilde{f}(p, \tau)$ — периодическая функция по

аргументу τ , и введем вместо ξ новую переменную

$$\eta = \xi - \tilde{f}(p, \tau).$$

Тогда второе уравнение системы (3.14) можно переписать в виде

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \omega_u(p) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} \frac{dp}{d\tau}.$$

Второе слагаемое пропорционально амплитуде возмущений и поэтому его можно опустить. В результате имеем

$$\left. \begin{aligned} dp/d\tau &= a_u(p, \tau) \sin(\eta + \tilde{f}(p, \tau)) + b_u(p, \tau) \cos(\eta + \tilde{f}(p, \tau)); \\ d\eta/d\tau &= \omega_u(p), \end{aligned} \right\} (3.15)$$

где $a_u(p, \tau) = \omega_{i0} R_0 \rho \widehat{B}_\rho / B_\tau$;

$$b_u(p, \tau) = \omega_{i0} R_0 \rho \frac{qV_{\text{дп}} \sin \tau}{\varepsilon v_{\parallel} - qV_{\text{дп}} \cos \tau} \frac{\widehat{B}_\theta}{B_\tau}.$$

Здесь \widehat{B}_ρ и \widehat{B}_θ — амплитуды возмущений винтового магнитного поля.

Подобным образом можно преобразовать уравнения и для запертых частиц, однако для таких частиц угол θ ограничен точками отражения, и поэтому в качестве времени можно выбрать величину τ , связанную с θ равенством

$$\sin(\theta/2) = \kappa(\rho) \sin \tau. \quad (3.16)$$

После несложных, но громоздких преобразований, аналогичных выполненным выше для пролетных частиц, получим

$$\left. \begin{aligned} dp/d\tau &= a_t(p, \tau) \sin(\eta + \tilde{f}_t(p, \tau)) - b_t(p, \tau) \cos(\eta + \tilde{f}_t(p, \tau)); \\ d\eta/d\tau &= \omega_{dt}(p), \end{aligned} \right\} (3.17)$$

где

$$a_t = \frac{\widehat{B}_\rho}{B_\tau} \frac{2\omega_{i0} \rho R_0 \kappa (\varepsilon v_{\parallel 0} \cos \tau + qV_{\text{дп}} (1 - 2\kappa^2 \sin^2 \tau))}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \tau} (\varepsilon v_{\parallel 0} - qV_{\text{дп}} \cos \tau)};$$

$$b_t = - \frac{\widehat{B}_\theta}{B_\tau} \frac{4\omega_{i0} \rho R_0 \kappa^2 qV_{\text{дп}} \sin \tau}{\varepsilon v_{\parallel 0} - qV_{\text{дп}} \cos \tau}.$$

Правые части уравнений для p (3.15), (3.17) можно разложить в ряд Фурье по τ :

$$\left. \begin{aligned} dp/d\tau &= \sum_k D_k^{t,u}(p) \cos(\eta - k\tau + \Delta_k(p)); \\ d\eta/d\tau &= \omega_{t,u}(p). \end{aligned} \right\} (3.18)$$

Индексы t и u означают запертые и пролетные частицы. В общем случае коэффициенты D_k можно вычислить лишь с помощью численных методов. Ниже будут приведены результаты численных расчетов. Однако прежде выполним аналитические оценки для случая сильнопролетных ($\kappa \gg 1$) и сильнозапертых ($\kappa \ll 1$) частиц. Начнем со случая пролетных частиц, для которых можно положить $|v_{\parallel}| \cong v$. Невозмущенная траектория

таких частиц с точностью до λ^2 , где $\lambda = q\rho_{\perp} < \rho_0$, описывается уравнением

$$\rho = \rho_0 + \lambda \cos \theta.$$

Здесь $\rho_0 = \rho(p)$ — значение координаты частицы при $\theta = \pi/2$. С той же точностью уравнение для фазы записывается в виде

$$d\xi/d\tau = m - nq(\rho_0) - (nq\lambda/\rho_0)(1 + s_0) \cos \tau,$$

где $s_0 = s(\rho_0)$ — шир магнитного поля. Отсюда следует, что

$$\omega_u = m - nq(\rho_0), \quad \bar{f}_u = -(\lambda/\rho_0)nq(1 + s_0) \sin \tau.$$

Оставляя в (3.14) главные слагаемые и используя (3.12), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{\omega_{i0}\rho m\psi_0}{2} \exp\left\{-\frac{(\rho - \rho_s)^2}{\Delta\rho^2}\right\} \sin[\eta - (\lambda nq/\rho_0)(1 + s_0) \sin \tau]; \\ d\eta/d\tau &= m - nq(\rho_0). \end{aligned} \right\} (3.19)$$

В зависимости от соотношения размера области локализации $\Delta\rho$ и радиального отклонения дрейфовой траектории от магнитной поверхности λ можно рассматривать два предельных случая. Первый из них соответствует нелокализованным возмущениям $\lambda/\Delta\rho \ll 1$, что выполняется при малых значениях m . В этом случае легко получить

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\omega_{i0}a\rho_0 m\psi_0}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{\lambda nq}{\rho_0}(1 + s_0)\right) \sin(\eta + k\tau). \quad (3.20)$$

Здесь $J_k(x)$ — функция Бесселя. Таким образом, из-за конечного значения скорости дрейфа одна винтовая мода воспринимается частицей как набор гармоник, амплитуда которых убывает с ростом k . Помимо основного резонанса ($m - nq = 0$) появляются дополнительные дрейфовые резонансы [69], соответствующие значениям ρ_0 (или p), при которых $m - nq(\rho_0) = k$.

При больших значениях m возмущения становятся локализованными ($\lambda/\Delta\rho \gg 1$). Для пролетных частиц это условие выполняется при $\rho_{\perp} < \rho_s/m < \rho_{\perp}q$, откуда $\rho_s/\rho_{\perp} > m > \rho_s/(\rho_{\perp}q)$. Левое неравенство отражает условие применимости дрейфового приближения. При $\lambda/\Delta\rho \gg 1$ радиальную зависимость возмущения $\exp\{-(\rho - \rho_s)^2/\Delta\rho^2\}$ можно заменить предельным выражением $\sqrt{\pi}\Delta\rho\delta(\rho - \rho_s)$, а затем вычислить коэффициенты Фурье в разложении правой части первого уравнения (3.19). При $|\rho_0 - \rho_s| < \lambda$ из (3.19) следует

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\omega_{i0}am\psi_0\rho_0\Delta\rho J_0[\lambda(nq/\rho_0)(1 + s_0)]}{4\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda^2 - (\rho_0 - \rho_s)^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(k\tau_s) \sin(\eta + k\tau). \quad (3.21)$$

В последнем уравнении $\tau_s = \theta_s$ обозначает значение угла θ , при котором происходит пересечение траекторией частицы с резонансной магнитной поверхностью: $\rho_0 - \rho_s + \lambda \cos \tau_s = 0$. При $|\rho_0 - \rho_s| > \lambda$ траектория лежит полностью вне резонансной зоны, и поэтому коэффициенты Фурье равны нулю. Как видно из уравнения (3.21), для локализованных возмущений амплитуда дрейфовых резонансов в $\lambda/\Delta\rho$ раз меньше по сравнению с однородным возмущением, однако спадает с ростом k медленнее, чем для однородных возмущений. В окрестности резонансных значений ρ_0 , где $m - nq(\rho_0) = k$, траектория частицы испытывает прецессию с амплитудой

$$\Delta\rho_0 \simeq \{m\psi_0\rho_s a\Delta\rho / (\sqrt{\pi} n s \lambda)\}^{1/2}. \quad (3.22)$$

При достаточно большой амплитуде ψ_0 резонансы, соответствующие различным значениям k , могут перекрываться, и дрейфовые траектории окажутся разрушенными. Соответствующий критерий Чирикова [70] выглядит следующим образом:

$$\psi_0 > \psi_{cr} = \sqrt{\pi} \lambda \rho_s / (nq^2 s m \Delta\rho a). \quad (3.23)$$

При выполнении последнего неравенства частица испытывает случайные смещения в области шириной $\sim \lambda$. Для того чтобы оценить, насколько велико полученное критическое значение амплитуды ψ_{cr} , сравним его с характерным значением ψ_M , которое для локализованных возмущений оценим следующим образом. При малой амплитуде возмущений ширина магнитного острова $\Delta\rho_M$ меньше ширины локализации $\Delta\rho$ и определяется амплитудой возмущений в точке $\rho = \rho_s$.

$$\Delta\rho_M = \left\{ \frac{2am\psi_0}{|n|s} \rho_s \right\}^{1/2}. \quad (3.24)$$

При очень большой амплитуде $\Delta\rho_M$ стремится к ширине области локализации. Определим ψ_M , приравнявая (3.24) к ширине локализации $\Delta\rho$:

$$\psi_M = \Delta\rho^2 n |s| / (2ma\rho_s). \quad (3.25)$$

Тогда

$$\psi_{cr} / \psi_M = 2\sqrt{\pi} \lambda / (\Delta\rho s^2). \quad (3.26)$$

Как видно из последней оценки, разрушение дрейфовых поверхностей под действием одной моды локализованных возмущений возможно лишь при большом шире ($s > 1$) и $\Delta\rho \simeq \lambda [m \simeq \rho_s / (\rho_{Lq})]$. В противном случае для этого потребуется слишком большая амплитуда возмущений $\psi_0 > \psi_M$.

Обратимся теперь к запертым частицам ($\kappa \ll 1$), уравнение траектории которых с помощью (3.16) можно представить в виде $\rho = \rho_* - 4\kappa^2 \lambda \cos \tau$, где $\rho_* = \rho_*(p)$ — координаты точки от-

ражения. С точностью до λ^2 уравнение для фазы можно записать следующим образом:

$$d\xi/d\tau = 2\lambda_* n q_* \kappa_* / \rho_* - 2m\kappa_* (nq_* / m - 1) \cos \tau$$

(символ «*» означает, что соответствующая величина вычислена в точке отражения). Из последнего уравнения следует

$$\omega_t(\rho) = 2\lambda_* n q_* \kappa_* / \rho_*;$$

$$\dot{\tau}_t(\rho, \tau) = -2m\kappa_* (nq_* / m - 1) \sin \tau = -\alpha \sin \tau.$$

В случае локализованных мелкомасштабных возмущений

$$\rho_s / \rho_l \gg m \gg (\rho_s / \rho_l) \sqrt{\varepsilon} / (q\kappa_*),$$

которые оказывают большее влияние на динамику α -частиц, чем крупномасштабные моды; как и раньше, можно заменить радиальное распределение возмущения δ -функцией:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{m\omega_{i0}\rho_*\psi_0\kappa_*\Delta\rho J_0(\alpha) \cos \tau_s}{2\sqrt{\pi} \sqrt{16\lambda_*^2 \kappa_*^4 - (\rho_* - \rho_s)^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(k\tau_s) \sin(\tau + k\tau). \quad (3.27)$$

Здесь τ_s — значение фазы τ в резонансной точке. Резонансные значения ρ_* (или p_*) определяются из условия

$$\omega_t(\rho) = -2\lambda_* n q_* \kappa_* / \rho_* = -k. \quad (3.28)$$

Резонансное условие (3.28) означает следующее. Запертая частица совершает колебания вдоль силовых линий с частотой ω_b (3.4) и дрейфует вдоль тороидального обхода со скоростью ω_a . Поскольку для таких частиц среднее за период значение θ равно нулю, то фаза возмущений изменяется со скоростью $n\omega_a$. При этом частица попадает в резонанс с возмущениями, когда $n\omega_a = k\omega_b$. Учитывая выражения (3.4) и (3.8), с помощью последнего равенства приходим к условию (3.28). Очевидно, что отношение $\omega_a/\omega_b \sim \rho_l/R$ мало, и поэтому резонансное условие для запертых частиц выполняется лишь в случае мелкомасштабных мод и частиц высокой энергии.

В окрестности резонансных значений ρ_h траектория запертой частицы испытывает супербанановую прецессию с амплитудой

$$\frac{\Delta\rho_*}{\rho_*} \simeq \left\{ \frac{q_* \Delta\rho\psi_0\alpha}{8\sqrt{\pi} \lambda_*^2 \kappa_*^2} \right\}^{1/2}. \quad (3.29)$$

При ширине локализации порядка ширины банана $\Delta\rho \simeq 4\lambda_* \kappa_*^2$, $\psi_0 = \psi_m$ и $s=1$ имеем

$$\Delta\rho_*/\rho \simeq (2\kappa_*^2 / (\sqrt{\pi} m))^{1/2} < 1.$$

В случае запертых частиц $\kappa < 1$, для перекрытия дрейфовых резонансов требуется амплитуда возмущений $\psi_0 \gtrsim 2\sqrt{\pi} \rho_* / (amq)$, что примерно в $m \gg 1$ раз превышает ψ_M , и, следовательно, локализованная мода не может разрушить дрейфовые поверхности запертых частиц. Этот вывод остается справедливым и в случае небольших значений m и n , соответствующих крупномасштабным, нелокализованным возмущениям.

Приведенные аналитические оценки согласуются с результатами численных расчетов, в которых критическая амплитуда, соответствующая выполнению критерия Чирикова, рассчитывалась численно. Для того чтобы при численных расчетах продвинуться в область мелкомасштабных возмущений с $\Delta\rho \leq \rho_L$, в [71] возмущенное магнитное поле усреднялось по фазе лармовского вращения:

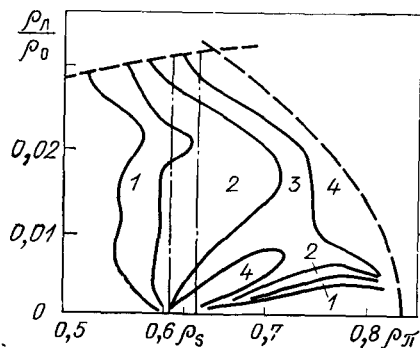
$$\langle \hat{\mathbf{B}} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r} + \rho_L(\mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \sin \alpha)) d\alpha.$$

На рис. 39 показаны области с различной критической амплитудой, необходимой для перекрытия дрейфовых резонансов пролетных частиц. По осям отложены значения дрейфовой скорости и координаты ρ на траектории при $\theta = \pi$. Эта величина, которая является функцией ρ , $\rho_\pi = \rho_\pi(\rho)$, более наглядна, чем ρ . Расчеты выполнены для частицы, у которой точка отражения находится при $R = 0,8R_0$. Отметим, что даже при наличии винтовых возмущений магнитный момент частицы не изменяется, и поэтому не меняется и радиальная координата точки отражения. Результаты, представленные на рис. 39, получены для моды $m = 25$, $n = 20$ и параболического распределения плотности тока. Верхняя граница области соответствует таким значениям дрейфовой скорости, при которых частица перестает охватывать магнитную ось и которые требуют специального

Рис. 39. Области с различными значениями критической амплитуды ψ_{cr} для частиц с $v = 0,8$; $m = 25$; $n = 20$;

$$\gamma = (\psi_{cr} / \psi_M) \frac{\Delta\rho^2}{a\rho_s} \frac{ns}{m};$$

1 — $0,1 \leq \gamma < 0,2$; 2 — $0,033 \leq \gamma < 0,1$; 3 — $0,02 \leq \gamma < 0,033$; 4 — $\gamma < 0,02$; ρ_s — положение резонансной магнитной поверхности; — — — границы области локализации возмущений



рассмотрения. Правая граница, отмеченная пунктиром, соответствует сепаратрисе, разделяющей пролетные и запертые частицы. Частица взаимодействует с возмущением тогда, когда ее траектория заходит в область локализации, т. е. $\rho_{\pi} \ll \rho_s$ и $\rho(\theta = 0) \ll \rho_s$. С ростом дрейфовой скорости (энергии) увеличивается отклонение частицы от магнитной поверхности $\rho(\pi) - \rho(0)$, и поэтому область с малыми значениями критической амплитуды расширяется. Появление области с малыми ψ_{cr} при малой скорости дрейфа ($0,005 < \rho_{\pi}/\rho_0 < 0,01$) соответствует оценке (3.23) и объясняется тем, что в этой области $\lambda/\Delta\rho \approx 1$. При дальнейшем уменьшении скорости дрейфа возмущения уже нужно рассматривать как нелокализованные. Как следует из (3.20), у таких возмущений амплитуда дрейфовых резонансов быстро спадает с увеличением k и поэтому область с малыми критическими амплитудами сужается.

Как и следовало ожидать, вблизи от сепаратрисы расположена узкая область с очень малыми значениями ψ_{cr} . Это связано с тем, что вблизи от сепаратрисы $\omega_d/\omega_b \rightarrow \infty$ и поэтому резонансы расположены очень часто и легко перекрываются. Однако эта область, как обычно [70], оказывается экспоненциально узкой и слабо влияет на общую картину.

Расчеты показывают, что запертые частицы имеют существенно большее значение критической амплитуды возмущений $\psi_{cr} > \psi_m$ вплоть до таких значений энергии, при которых они перестают удерживаться в токамаке.

Рассмотрим теперь влияние нескольких винтовых мод на дрейфовые поверхности энергичных частиц. С одной стороны, ширина основного острова $k=0$ на дрейфовой поверхности меньше, чем ширина соответствующего магнитного острова, с другой, на дрейфовых поверхностях появляются дополнительные дрейфовые резонансы и поэтому заранее неясно, какие поверхности будут разрушаться при меньших амплитудах — магнитные или дрейфовые.

В качестве примера рассмотрим набор мелкомасштабных винтовых мод ($m, n \gg 1$), которые имеют резонансные точки, $m - nq(\rho_{sk}) = k$, расположенные на равном расстоянии друг от друга, $\delta\rho = \rho_{s_{k+1}} - \rho_{sk} = 1/(nq')$:

$$\frac{\tilde{B}_\rho}{B_T} = \frac{\varepsilon \zeta_0}{2} \sum_k k \exp \left\{ -\frac{(\rho - \rho_{sk})^2}{\Delta\rho^2} \right\} \sin(k\theta - n\varphi),$$

с одной и той же шириной локализации $\Delta\rho$. Так как винтовые возмущения оказывают слабое влияние на запертые частицы, достаточно рассмотреть пролетные частицы. При $\kappa \gg 1$ траекторию можно представить в виде $\rho = \rho_0 + \lambda \cos \theta$.

Тогда уравнение, описывающее возмущение p , будет отличаться от (3.19) только наличием суммы по k :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{a\omega_{i0}\psi_0 m}{2} \sum_k \frac{m+k}{m} \exp \left\{ -\frac{(\rho - \rho_{sk})^2}{\Delta\rho^2} \right\} \times \\ &\times \sin \left[\eta - (\lambda nq/\rho_0) (1 + s_0) \sin \tau + k\tau \right]; \\ d\eta/d\tau &= m - nq(\rho_0), \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

где $\eta = m\theta - n\varphi$. В дальнейшем, учитывая, что $m \gg 1$, положим $(m+k)/m = 1$. Будем считать, что резонансы расположены достаточно часто, $\delta\rho \ll a$, и разложим правую часть второго уравнения (3.30) в ряд в окрестности $\rho_0 = \rho_{sm}$:

$$d\eta/d\tau = -nq'(\rho_{sm})(\rho_0 - \rho_{sm}).$$

Вводя вместо p новую переменную $y = nq'(\rho_{sm})(\rho_0 - \rho_{sm})$, при $\kappa \gg 1$ получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{aqm\psi_0}{2\delta\rho} \sum_k \exp \left\{ -\frac{[y - k + (\lambda/\delta\rho) \cos \tau]^2}{(\Delta\rho/\delta\rho)^2} \right\} \times \\ &\times \sin \left(\eta - \frac{nq\lambda}{\rho_0} (1 + s_0) \sin \tau + k\tau \right); \\ d\eta/d\tau &= -y. \end{aligned}$$

Теперь, используя разложение Фурье, выделяем в правой части одну N -ю гармонику:

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{y}/d\tau &= \psi_0 G(\tilde{y}) \sin \tilde{\eta}; \\ d\tilde{\eta}/d\tau &= -\tilde{y}. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Здесь $\tilde{y} = y - N$; $\tilde{\eta} = \eta + N\theta$;

$$G(\tilde{y}) = \frac{aqm}{2\tilde{\epsilon}\rho} \sum_k C_k \left(\frac{\tilde{y} + k}{\Delta\rho/\delta\rho} \right);$$

$$\begin{aligned} C_k(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ -\left(z - \frac{\lambda}{\Delta\rho} \cos \theta \right)^2 - \right. \\ &\left. - i \frac{nq\lambda(1+s_0)}{\rho_{sm}} \sin \theta + ik\theta \right\} d\theta. \end{aligned}$$

Видно, что для выбранных возмущений амплитуда N -го резонанса не зависит от номера N . Система уравнений (3.31) легко интегрируется с помощью замены переменных $z = \int_0^{\tilde{y}} dy/G(y)$, в результате чего можно получить соотношение, связывающее

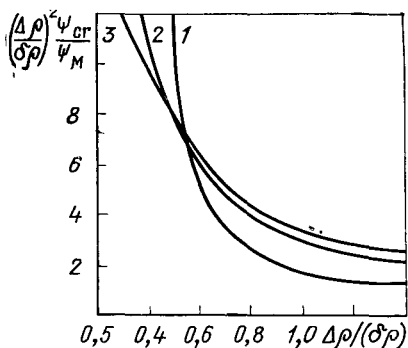


Рис. 40. Зависимость критической амплитуды от ширины локализации возмущений. Разные кривые соответствуют различным отклонениям дрейфовой траектории от магнитной поверхности:

1 — $\Delta\rho_b=0$ (магнитные поверхности); 2 — $\Delta\rho_b/\Delta\rho=4$; 3 — $\Delta\rho_b/\delta\rho=8$

амплитуду возмущений и полуширину сепаратрисы y_m :

$$\psi_0 = (1/2) \int_0^{y_m} \tilde{y} d\tilde{y} / G(\tilde{y}).$$

По оси \tilde{y} резонансы отстоят на расстоянии $\Delta\tilde{y}=1$, и поэтому для их перекрытия требуется критическая амплитуда возмущений, равная

$$\psi_{cr} = (1/2) \int_0^1 \tilde{y} d\tilde{y} / G(\tilde{y}). \quad (3.32)$$

В частности, для магнитных силовых линий $\lambda \rightarrow 0$

$$G(\tilde{y}) = \frac{aqm}{2\delta\rho} \exp\left\{-\frac{y^2\delta\rho^2}{\Delta\rho^2}\right\},$$

откуда

$$\psi_{cr} = \frac{\delta\rho}{2aqm} \left(\frac{\Delta\rho}{\delta\rho}\right)^2 \left\{ \exp\left[\left(\frac{\delta\rho}{\Delta\rho}\right)^2\right] - 1 \right\}. \quad (3.33)$$

При большой ширине локализации $\Delta\rho \gg \delta\rho$ из (3.33) получаем хорошо известную оценку для перекрытия магнитных островов:

$$B_0/B_T > \epsilon / (4nq^2s).$$

При произвольных значениях λ оценку (3.32) можно выполнить лишь с помощью численных методов. На рис. 40 показана критическая амплитуда возмущений, необходимая для разрушения дрейфовых поверхностей прелетных частиц в зависимости от ширины локализации возмущений. Видно, что для разрушения дрейфовых поверхностей при не слишком малой ширине локализации требуется большее значение амплитуды, чем для разрушения магнитных поверхностей ($\lambda=0$). Отметим, что при $\Delta\rho = \rho_{sm}/m$ отношение $\Delta\rho$ к $\delta\rho$ зависит только от ширины

$\Delta\rho/(\delta\rho) = s$, и поэтому при $s \sim 1$, по-видимому, раньше будут разрушаться магнитные, а не дрейфовые поверхности частиц. Можно ожидать, что даже при разрушенных магнитных поверхностях, сопровождающихся аномальной электронной теплопроводностью, мелкомасштабные винтовые возмущения не сильно удушат удержание термоядерных α -частиц.

В [72—75] выполнено численное моделирование удержания частиц в токамаке при наличии нескольких крупномасштабных мод винтовых возмущений. В [74, 75] рассмотрено воздействие трех винтовых мод с радиальной структурой вида (3.12) на движение тепловых частиц. В расчетах, которые проводились по методу Монте-Карло, вводилось небольшое рассеяние частиц, и критическое значение амплитуды для разрушения дрейфовых поверхностей определялось из условия резкого возрастания коэффициента диффузии частиц по сравнению с неоклассическим. Получено, что электронный коэффициент диффузии становится аномальным при меньшем значении амплитуды, чем ионный. Этот результат не противоречит приведенному выше рассмотрению.

В [73] приводятся результаты измерений на токамаке PDX выходящих из плазмы потоков термоядерных протонов с энергией 15 МэВ, рождающихся во вторичных реакциях $d(^3\text{He}, p)\alpha$. Мощность вторичных реакций позволяет судить об удержании термоядерных ионов ^3He , рождающихся в $d(d, ^3\text{He})n$ -реакции. В этих экспериментах наблюдалась корреляция между потоком вторичных протонов и вспышками МГД-активности, связанными с развитием fishborn-неустойчивости. И хотя существует несколько возможных причин этого явления, авторы считают, что уменьшение выгорания ^3He связано с ухудшением их удержания. Это мнение основано на результатах численных экспериментов, выполненных с помощью численного кода [72], моделирующего движение частиц ^3He методом Монте-Карло. Расчеты проводили для гармоник $n=1, m=1, 2, 3$, представляющих возмущение магнитного поля при развитии fishborn-неустойчивости. Было получено, что даже при малой амплитуде возмущений $B/B_T < 10^{-3}$ возмущения приводят к значительному ухудшению удержания термоядерных ионов ^3He . Теоретическое объяснение этого явления отсутствует. Возможно, что этой амплитуды достаточно для перекрытия дрейфовых резонансов.

3.3. Гофрировка тороидального поля

Характерное возмущение магнитного поля, присущее любому токамаку — это гофрировка тороидального поля, возникающая из-за конечного числа катушек тороидального магнита [76]. Подробное изложение влияния гофрировки на процессы переноса в токамаке, и в том числе энергичных термоядерных

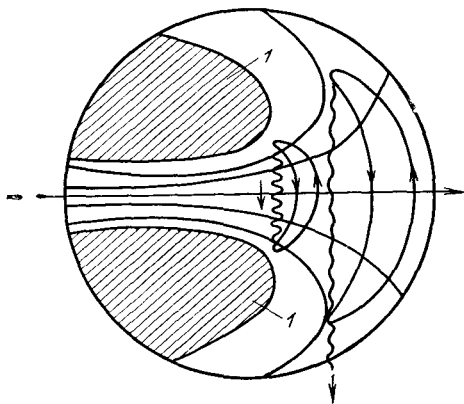


Рис. 41. Характерная картина линий уровня глубины магнитных ям $\Delta(R, z)$ в сечении плазменного шнура и характерные траектории запертых частиц (области с $\Delta=0$ заштрихованы)

частиц, можно найти в обзоре [77]. Поэтому здесь приведем лишь основные результаты, касающиеся энергичных термоядерных частиц. Прежде всего рассмотрим, как изменяется геометрия орбит частиц при наличии гофрировки. Гофрировка с хорошей точностью представляет собой одну моду с азимутальным числом n , совпадающим с числом тороидальных катушек N [76]:

$$B_T = B_0(R_0/R) (1 + \delta \cos N\varphi). \quad (3.34)$$

Неоднородность магнитного поля в $\delta(R, z) = \delta B/B$ в токамаке обычно мала ($\delta \ll 1$). В случае круглых тороидальных катушек линии уровня гофрировки $\delta(R, z)$ представляют собой вложенные окружности, центр которых смещен в сторону главной оси тора [76], причем δ обычно довольно резко нарастает при удалении от центра к периферии плазменного шнура. Раскладывая (3.34) в ряд по $\epsilon < 1$ и используя обозначение (3.2), получаем формулу, описывающую изменение магнитного поля вдоль силовой линии:

$$|B| = B_0 [1 - \epsilon \cos \theta + \delta \cos (Nq\theta + N\varphi_0)]. \quad (3.35)$$

На плавное изменение магнитного поля из-за тороидальности, которое описывается вторым слагаемым в уравнении (3.35), гофрировка накладывает мелкомасштабные возмущения, которые могут приводить к появлению локальных магнитных ям глубиной $\Delta = (B_{\max} - B_{\min})/B$. Однако локальные ямы и, следовательно, локально запертые частицы могут существовать лишь в той области, где поле немонотонно, т. е. $\gamma = \epsilon |\sin \theta| / (\delta Nq) < 1$. На рис. 41 изображена характерная для токамака картина линий уровня Δ в плоскости сечения плазменного шнура.

Скорость пролетных частиц велика ($v_{\parallel}/v > \sqrt{\epsilon} \gg \sqrt{\Delta}$), и такие частицы практически не чувствуют влияния гофрировки магнитного поля. У запертых частиц продольная скорость в точке отражения обращается в нуль, поэтому такая частица может оказаться захваченной в локальной магнитной яме. Захват обусловлен тороидальным дрейфом частиц. Действитель-

но, из-за тороидального дрейфа частица, приближаясь к точке отражения и удаляясь от нее, имеет различную радиальную координату ρ (конечная ширина банана) и, следовательно, чувствует различную гофрировку $\delta(\rho)$ [78]. Кроме того, изменяется и фаза гофрировки $N\varphi_0$ из-за дрейфа банана в тороидальном направлении $N\dot{\varphi}_0 = N\omega_d t$, и поэтому частица воспринимает гофрировку как бегущую волну с частотой $\omega = N\omega_d$. При отражении частица, прошедшая над ближайшей к точке отражения локальной магнитной пробкой, возвращаясь, может встретить более высокий потенциальный барьер и превратиться в локализованную.

Период колебаний частицы в локальной ловушке можно оценить следующим образом:

$$T_1 \approx 2\pi R / (Nv_{\parallel}) \approx 2\pi R / (Nv\sqrt{\delta}).$$

За это время фаза гофрировки $N\varphi_0$ изменится на

$$N\omega_d T_1 \approx 2\pi q\rho_{\parallel} / (V\sqrt{\delta}a).$$

При типичных значениях параметров реактора-токамака последняя величина для α -частиц превышает 2π : $N\omega_d T_1 \gg 2\pi$. Это означает, что α -частицами (из-за их большой скорости дрейфа) гофрировка воспринимается как быстро бегущая волна, и поэтому для расчета в вероятности трансформации орбит обычно используемое адиабатическое приближение [79, 80] неприменимо. Тем не менее можно утверждать, что запертые частицы, имеющие точки отражения в области $\gamma < 1$, могут превратиться в локализованные. Траектория частицы становится случайной — часть времени частица проводит в виде запертой, часть в виде локализованной (см. рис. 41). Однако в реакторе-токамаке условия отсутствия дополнительных гофрировочных потерь основной плазмы [77] требуют достаточно малой гофрировки $\gamma = \varepsilon / (Nq\delta) \gg 1$. При этом область 1 на рис. 41, в которой отсутствуют локальные магнитные ямы, занимает практически все сечение плазмы, за исключением узкой окрестности экваториальной плоскости тора $z = 0$. В случае $\gamma \gg 1$ основной эффект дает бесстолкновительная банановая диффузия, обнаруженная Голдстоном, Вайтом и Бузером [81].

3.4. Бесстолкновительная банановая диффузия в гофрированном магнитном поле

Бесстолкновительная банановая диффузия, которая играет важную роль в удержании термоядерных α -частиц, изучена довольно подробно [75, 81—86]. Здесь мы рассмотрим это явление, исследуя движение отдельных частиц в гофрированном магнитном поле.

Основной эффект гофрировки сводится к появлению у продольной скорости частицы небольших осцилляций, связанных с возмущениями поля $|B|$ (3.35):

$$v_{\parallel} = v_{\parallel 0} \left[1 - \frac{1}{\kappa^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\delta}{2\epsilon\kappa^2} (\cos(Nq\theta + N\varphi_0) - \cos(N\varphi_0)) \right]^{1/2}. \quad (3.36)$$

Здесь $v_{\parallel 0}$ — продольная скорость частицы при $\theta = 0$. Как можно показать [77], возмущения радиального и полоидального компонентов магнитного поля приводят к эффектам более слабым и поэтому их можно не учитывать. При этом уравнения движения сохраняют прежний вид (3.7), но v_{\parallel} теперь будет определяться формулой (3.36). Ограничиваясь линейным приближением по малому параметру $V_{др}/v_{\parallel 0} \ll 1$, можно положить $\dot{\theta} = v_{\parallel}/(qR_0)$. Тогда уравнения движения (3.7) удобно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} d\rho/d\theta &= -(R_0 V_{др} q / v_{\parallel}) \sin \theta; \\ d\varphi_c/d\theta &= (R_0 q^2 V_{др} / v_{\parallel}) (\cos \theta + s \theta \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Для того чтобы получить приращение радиальной координаты $\Delta\rho$ из-за гофрировки, проинтегрируем первое уравнение системы (3.37) по периоду движения частицы:

$$\Delta\rho = -V_{др} q R_0 \oint \sin \theta d\theta / v_{\parallel}. \quad (3.38)$$

Легко видеть, что при отсутствии гофрировки ($\delta = 0$) частица возвращается на исходную магнитную поверхность $\Delta\rho = 0$. Для пролетных частиц, у которых продольная скорость не обращается в нуль, малые осцилляции, связанные с гофрировкой, усредняются, и в результате смещение оказывается малым: $\Delta\rho \simeq \delta / (Nq)^2$.

Рассмотрим теперь запертые частицы ($\kappa < 1$). Из-за наличия точек поворота ($v_{\parallel} = 0$) амплитуда смещения таких частиц существенно больше, чем у пролетных. Как будет показано, основной вклад в (3.38) дают точки отражения, поэтому интеграл (3.38) удобно разбить на две части, соответствующие интегрированию по верхней и нижней половинам траектории частицы: $\Delta\rho = \Delta\rho_+ + \Delta\rho_-$. Для того чтобы оценить $\Delta\rho_+$, введем в (3.38) замену $\theta \rightarrow \xi$:

$$\frac{1}{\kappa^2} \left\{ \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\delta}{2\epsilon} [\cos(Nq\theta + N\varphi_0) - \cos(N\varphi_0)] \right\} = \sin^2 \xi \quad (3.39)$$

так, чтобы точкам поворота $v_{\parallel} = 0$ соответствовали значения $\xi = \pm \pi/2$. Замена (3.39) взаимно однозначна только при

$\delta N^2 q^2 / \varepsilon < 1$. При $\delta N^2 q^2 / \varepsilon > 1$ в окрестности экваториальной плоскости $|\theta| < \delta N q / \varepsilon$ существуют локальные магнитные ямы, и поэтому в этой области левая часть (3.39) немонотонна по θ . Однако при $\delta N q / \varepsilon \ll 1$ эта область узкая и ее вкладом в интеграл (3.38) можно пренебречь:

$$\Delta \rho_+ = - \frac{V_{др} q R_0}{v_{||0}} 4\kappa^2 \int_{\xi_1}^{\pi - \xi_1} \frac{\sin \theta(\xi) \sin \xi d\xi}{\sin \theta(\xi) - (\delta N q / \varepsilon) \sin(Nq\theta + N\varphi_0)}. \quad (3.40)$$

где $\xi_1 \sim \delta N q / \varepsilon$. Раскладывая правую часть (3.40) в ряд по δ и выделяя слагаемое $\sim \delta$, получаем смещение радиуса частицы из-за гофрировки:

$$\Delta \rho_+ \simeq - \frac{\sqrt{2} \rho_L \delta N q^2}{2\varepsilon^{3/2}} \int_{\xi_1}^{\pi - \xi_1} \frac{\sin(Nq\theta(\xi) + N\varphi_0) d\xi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \xi}}. \quad (3.41)$$

В подынтегральном выражении зависимость $\theta(\xi)$ достаточно определить из (3.39) в нулевом приближении по δ . При $\kappa \ll 1$ $\theta \simeq 2\kappa \sin \xi$, после чего интеграл (3.41) можно вычислить методом перевала [75, 81]:

$$\Delta \rho_+ = -\Delta \sin(2Nq\kappa + N\varphi_0 - \pi/4), \quad (3.42)$$

где $\Delta = \sqrt{\frac{\pi N}{2\kappa}} \left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^{3/2} \rho_L \delta$.

Для нижней части траектории аналогичным образом получаем

$$\Delta \rho_- = -\Delta \sin(N\varphi_0 - 2Nq\kappa + \pi/4). \quad (3.43)$$

Теперь для того, чтобы получить разностные уравнения, необходимо воспользоваться уравнением (3.8). В результате имеем [81]:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{i+1} &= \rho_i - \Delta \cos(Nq\theta_i + N\varphi_{0i}); \\ \varphi_{0i+1} &= \varphi_{0i} + (1/2) T_b \omega_d(\rho_i); \\ \rho_{i+2} &= \rho_{i+1} - \Delta \cos(-Nq\theta_i + N\varphi_{0i+1}); \\ \varphi_{0i+2} &= \varphi_{0i+1} + (1/2) T_b \omega_d(\rho_i). \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Первая пара уравнений соответствует верхней точке отражения (ρ_i — координата частицы до точки отражения, ρ_{i+1} — после ее прохождения). Вторая пара уравнений описывает приращение ρ в нижней вершине банана. При большом значении Δ , при котором, согласно критерию Чирикова, выполняется неравенство

$$\max \left\{ \Delta \frac{d}{d\rho} 2Nq\theta_i, \quad \Delta \frac{dT_b \omega_d}{d\rho} \right\} \gg 1, \quad (3.45)$$

фазы в первом и третьем уравнениях можно считать случайными, и движение частиц становится стохастическим. Обычно в

условиях токамака $(dT_{\omega a}/d\rho)/(dNq\theta_t/d\rho) \approx q\rho_{\text{л}}!(a\sqrt{\varepsilon}) < 1$, и поэтому неравенство (3.45) ведет к следующему выражению для критической гофрировки [81]:

$$\delta_{\text{сг}} \simeq [\varepsilon / (\pi Nq)]^{3/2} / \rho_{\text{л}} q'. \quad (3.46)$$

Поскольку правая часть в (3.46) обратно пропорциональна скорости частицы, то при малой гофрировке бесстолкновительная банановая диффузия характерна лишь для частиц высокой энергии, и в том числе для термоядерных α -частиц. Соответствующий коэффициент диффузии, который возникает при $\delta > \delta_{\text{сг}}$, должен приводить к быстрым потерям запертых α -частиц.

В дальнейшем были предприняты усилия для построения более точных, чем (3.44), разностных уравнений. В частности, уравнения (3.44), вообще говоря, не сохраняют фазового объема (фазовый объем сохраняется только при $\Delta = \text{const}$). Этот дефект был исправлен в [75], где для его устранения в правую часть второго и четвертого уравнений системы (3.40) были добавлены слагаемые, пропорциональные амплитуде гофрировки.

В [82] было выполнено численное моделирование дрейфового движения частиц в токамаке с гофрированным магнитным полем. Для гофрировки использовали реальную зависимость от координат, соответствующую токамаку INTOR. Результаты расчетов показали, что разностные уравнения правильно описывают критическую гофрировку, хотя при численном решении дрейфовых уравнений разрушение дрейфовых поверхностей происходило при несколько большем значении δ .

В [84] авторы учли в разностных уравнениях дополнительные слагаемые, пропорциональные следующим членам разложения по амплитуде возмущений δ . Было получено, что с ростом параметра $\gamma^{-1} = \delta Nq / (\varepsilon \sin \theta_t)$ критическое значение δ уменьшается.

В стохастической области $\delta > \delta_{\text{сг}}$ смещения банановой частицы становятся случайными и поэтому потери α -частиц носят диффузионный характер. Коэффициент диффузии можно оценить следующим образом: $D \simeq \Delta^2 \omega_b$. Даже при $\delta \simeq \delta_{\text{сг}}$ смещение достаточно велико $[\Delta/a \simeq 1 / (\pi Nq)]$, и поэтому α -частица может уйти из плазмы за $10^2 - 10^4$ периодов движения по траектории, что существенно меньше времени ее охлаждения. В реакторе-токамаке это явление дает один из основных каналов потерь термоядерных α -частиц. Поэтому для расчета динамики α -частиц важно вычислить их коэффициент диффузии в стохастической области. Такие расчеты были выполнены в [85], где коэффициент диффузии был найден в результате решения кинетического уравнения в гофрированном магнитном поле:

$$D(v, \rho, \mu) = (\Delta^2 / T_b) [1 + \exp(6,9 - 5,5\alpha)]^{-1}, \quad (3.47)$$

где $\alpha = 2\sqrt{2}\Delta(d/d\rho)(Nq\theta_t)$; T_b — период колебаний запертых частиц (3.5).

Выражение (3.47) справедливо лишь для тех частиц, у которых точки отражения лежат в области $\delta Nq/(\epsilon \sin \theta_t < 1)$, где нет локальных магнитных ям. Формула (3.47) получена в результате аппроксимации результатов численных расчетов и охватывает как режим сильно развитой стохастичности ($\alpha \gg 1$), так и режим с частично разрушенными дрейфовыми поверхностями ($\alpha \leq 1$). Значение $\alpha = 1$ соответствует критической амплитуде (3.46), следующей из критерия Чирикова. При меньших энергиях α -частиц, при которых $\alpha < 1$, диффузия связана со столкновениями и носит довольно сложный характер. В этой области в диффузионные потоки основной вклад дают резонансные частицы с $N\Delta\varphi_0 = k\pi$, диффузия остальных частиц пренебрежимо мала [77]:

$$D = \frac{\Delta v_c}{(T_b v_c)^2 + \sin^2(N\Delta\varphi_0) + 0.46\alpha^2}$$

Здесь v_c — эффективная частота рассеяния α -частиц:

$$v_c = \frac{4v_i N^2 q^2}{\epsilon \sin^2 \theta_t} \left(\frac{E(x)}{K(x)} - \cos^2 \left(\frac{\theta_t}{2} \right) \right).$$

Если усреднить последний коэффициент диффузии по фазовому пространству, то можно получить

$$\langle D \rangle \approx \frac{\Delta^2}{T_b [1 + 0.46\alpha^2 / (T_b v_c)^2]^{1/2}}. \quad (3.47a)$$

Зависимость коэффициента гофрировочной диффузии α -частиц от параметра α приведена на рис. 42 (α^2 — порядка энергии частиц). Между стохастической областью $\alpha > 1$ и так называемой областью гофрировочного плато $\alpha < T_b v_c$ существует область с низким коэффициентом диффузии. Коэффициент диффузии (3.47a) мал в области $\alpha \gg 1$, поэтому сумма (3.47) и (3.47a) описывает коэффициент диффузии во всем диапазоне энергии α -частиц:

$$D = \frac{\Delta^2}{T_b} \left\{ \frac{1}{[1 + 0.46\alpha^2 / (T_b v_c)^2]} + \frac{1}{1 + \exp(6,9 - 5,5\alpha)} \right\}. \quad (3.48)$$

Поскольку величина D резко меняется в окрестности $\alpha = 1$, заранее трудно оценить влияние этого эффекта на энергетические характеристики α -компонента в условиях реального распределения параметров в реакторе-токамаке. Для этого, вообще говоря, необходимо выполнить трехмерные численные расчеты кинетического уравнения для функции распределения α -частиц. Чтобы избежать громоздких трехмерных расчетов, в [86] был использован модельный подход, при котором бес-

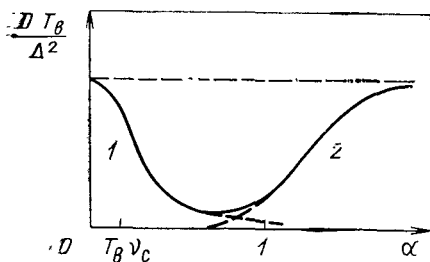


Рис. 42. Зависимость нормированного коэффициента гофрированной диффузии от параметра α ($\alpha^2 \sim$ энергии α -частиц):

1 — столкновительная диффузия (3.47);
2 — бесстолкновительная диффузия (3.46)

столкновительная банановая диффузия учитывалась с помощью конечного времени жизни α -частиц: $\tau_\delta = (a - \rho)^2 / D$. В результате в кинетическом уравнении (1.28) появилось дополнительное слагаемое

$$\partial f_\alpha / \partial t = St(f_\alpha) + S^\alpha - f_\alpha / \tau_\delta,$$

где a — малый радиус плазменного шнура. Расчеты были выполнены для реактора-токамака INTOR и соответствующего ему реального распределения магнитного поля. Основные параметры установки: $R_0 = 520$ см, $N = 12$, $B_0 = 5,5$ Тл. Обычно (в том числе и в рассмотренном в [86] примере) гофрировка распределена очень неравномерно по сечению плазмы. Она достигает наибольших значений в районе внешнего обвода тора, вблизи от экваториальной плоскости. Поэтому запертые частицы, имеющие точки отражения в этой области, могут быстро теряться из плазмы, в результате чего при большой гофрировке в токамаке образуется своеобразный конус потерь. Как показали результаты расчетов кинетического уравнения (3.48), это приводит к 10%-ным потерям энергии α -частиц на стенку при гофрировке на внешнем обводе тора $\delta = 1,2\%$. Прямые дрейфовые потери в токамаке INTOR при тех же параметрах составляют 3—4%. При $\delta = 0,3\%$ потери, связанные с гофрировкой, незначительны, а при $\delta = 5\%$ они приводят к потерям 50% энергии α -компонента.

Оказалось, что модель, использованная в [86], дает довольно точные результаты. Это видно из сравнения с результатами численного эксперимента, выполненного в [83] примерно для тех же параметров, с целью исследовать влияние гофрировки на удержание α -частиц. В этой работе гофрировку рассчитывали численно для реальной формы катушек тороидального магнита. Для невозмущенного поля использовали модель (2.65). Численное моделирование заключалось в расчете дрейфовых траекторий большого числа α -частиц с учетом их торможения и рассеяния на ионах плазмы методом Монте-Карло. Прежде всего исследовали влияние гофрировки на прямые дрейфовые потери α -частиц. Для этого расчет траектории начинали в экваториальной плоскости и прекращали, когда частица выходила

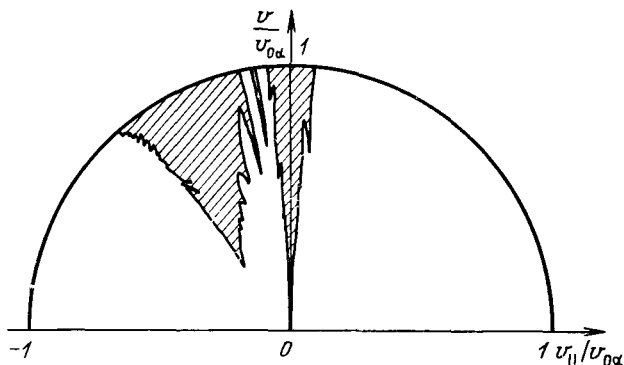


Рис. 43. Область прямых потерь α -частиц в токамаке с гофрировкой $\delta=0,75\%$. Расчеты выполнены [83] для частиц, родившихся в точке $\rho/a=0,8$, $\theta=0^\circ$, $\varphi=15^\circ$

на стенку или снова возвращалась на экваториальную плоскость.

На рис. 43 показаны области потерь в пространстве скоростей [83] для частиц, родившихся при $\rho/a=0,8$, $\theta=0^\circ$, $\varphi=30^\circ$. Результат получен для значения гофрировки на внешнем обводе шнура, равного $\delta=0,75\%$. Гофрировка приводит к дополнительному дрейфовому конусу потерь при малых значениях $v_{||}$, который связан с потерей локализованных частиц на стенку. Однако этот конус исчезает при уменьшении радиуса ρ , поскольку при меньших значениях ρ тороидальный дрейф выносит частицу в область без локальных магнитных ям (рис. 43). Наличие «усов» на границе конусов потерь связано с явлением бесстолкновительной трансформации орбит. Полная доля прямых потерь составляет 2, 3 и 7% при значениях δ , равных 0,5, 1 и 1,5%. Если расчет траекторий частиц не прекращался после первого оборота по траектории, а продолжался дальше, то доля теряемых α -частиц начинала нарастать со временем. Эти более медленные потери обязаны бесстолкновительной банановой диффузии. Было обнаружено, что критическое значение амплитуды хорошо согласуется с оценкой (3.46). На рис. 44 приведена полученная в расчетах доля частиц и энергии, теряемых из плазмы в зависимости от гофрировки. При $\delta \simeq 1,5\%$, в токамаке INTOR на стенку уходят практически все запертые частицы $v_{||}/v < \sqrt{\varepsilon}$. При $\delta=1\%$ численный эксперимент [83] дает примерно 10% потерь из-за бесстолкновительной диффузии, что хорошо согласуется с результатами, полученными на простой модели [86].

Отметим, что так как большая часть теряемых из плазмы α -частиц выходит на стенку в результате диффузии, распреде-

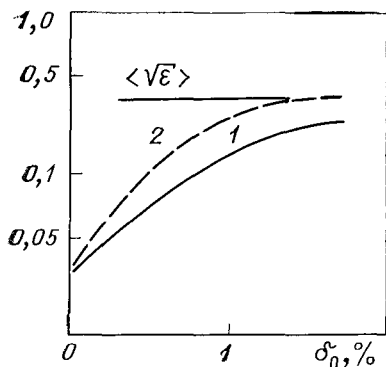


Рис. 44. Зависимость доли теряемых из плазмы частиц 1 и энергии 2 от гофрировки; $\langle \sqrt{\epsilon} \rangle$ — усредненное по источнику α -частиц значение обратного аспектного отношения

ление выходящих частиц по поверхности локализуется в окрестности внешнего обвода тора (см. § 2.9). В численных расчетах наблюдалась локализация потока не только по углу θ , но и по тороидальному углу φ , что связано с зависимостью знака радиального смещения банана от угла φ [см. (3.42)].

Таким образом, как показали результаты исследований последних лет, бесстолкновительная банановая диффузия является основным механизмом потерь α -частиц из-за гофрировки в условиях реактора-токамака с большим плазменным током.

Доля теряемых частиц довольно сильно зависит от распределения профиля тока и мощности источника α -частиц на периферии плазменного шнура. Это связано с тем, что область стохастических потерь расположена вблизи края плазмы, а ее граница (3.46) очень чувствительна к профилю q . Условие (3.46) можно рассматривать как условие на величину q : в заданной гофрировке потери α -частиц накладывают ограничение на нее сверху. Гофрировочные потери малы при малых значениях q и малом аспектном отношении плазмы.

3.5. Циклотронное взаимодействие α -частиц с гофрировкой

В токамаках с сильным магнитным полем катушки тороидального магнита, как правило, расположены близко к плазменному шнуру, и уменьшение гофрировки достигается увеличением их числа. При большом числе катушек может проявиться специфический циклотронный механизм взаимодействия α -частиц с гофрировкой [87—89]. Для неподвижных возмущений условие циклотронного резонанса выглядит следующим образом: $k_{\parallel} v_{\parallel} = \omega_i$, где $k_{\parallel} = N/R$.

Так как продольная скорость из-за тороидальности изменяется при движении частицы, то условие циклотронного резонан-

са выполняется лишь в отдельных резонансных точках на силовой линии. Эта ситуация во многом похожа на циклотронное взаимодействие частиц в адиабатических ловушках [90]. Если рассмотренные в предыдущих параграфах механизмы взаимодействия α -частиц с гофрировкой приводили к нарушению инварианта p , то циклотронное взаимодействие связано с вращением частицы по ларморовской окружности и поэтому ведет к изменению магнитного момента частицы μ . (В постоянном во времени магнитном поле энергия частицы не изменяется.)

Уравнение, описывающее изменение магнитного момента, можно получить, формально дифференцируя $\mu = v_{\perp}^2/B$ по времени и используя уравнения движения частицы в магнитном поле [91]:

$$d\mu/dt = -(v_{\perp}/B^2)(2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)(\mathbf{n} \cdot \nabla | \mathbf{B} |) + \dots; \quad (3.49)$$

$$d\alpha/dt = -\omega_i(\mathbf{r}). \quad (3.50)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \sin \alpha + \mathbf{e}_2 \cos \alpha$; α — фаза ларморовского вращения; $\mathbf{e}_1 = \nabla\psi/|\nabla\psi|$; $\mathbf{e}_2 = [(\mathbf{B}/|\mathbf{B}|) + \mathbf{e}_1]$. В правых частях (3.49), (3.50) опущены несущественные для дальнейшего слагаемые, пропорциональные $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$. Легко видеть, что в аксиально-симметричном поле усреднение (3.49) по α дает нуль в правой части, что соответствует сохранению магнитного момента. При наличии гофрировки в (3.49) появляются дополнительные слагаемые порядка $\exp[i(\omega_i - Nv_{\parallel}/R)t]$, и поэтому при выполнении резонансного условия $\omega_i = Nv_{\parallel}/R$ магнитный момент испытывает малое конечное приращение $\Delta\mu \sim \delta$.

Для исследования циклотронного взаимодействия важно выбрать для возмущений магнитного поля модель, удовлетворяющую условию $\text{div } \mathbf{B} = 0$. В противном случае в уравнении (3.49) появятся большие слагаемые порядка $\sim \text{div } \mathbf{B}$, которые будут приводить к быстрому и нефизичному изменению магнитного момента. Воспользуемся простейшей моделью:

$$\left. \begin{aligned} B_{\varphi} &= (NB_{\tau}/\rho R) \sin(N\varphi) \int_0^{\rho} \delta\rho \, d\rho; \\ B_{\theta} &= B_{\rho}(\rho) R_0/R; \\ B_{\varphi} &= B_{\tau} [(R_0/R) + \delta(\rho) \cos(N\varphi)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

В пределе $\rho/R \rightarrow 0$, уравнение $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ дает зависимость $\delta(\rho) = \delta_0 I_0(N\rho/R)$, где $I_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. При большом числе катушек, т. е. когда $x = N\rho/R \gg 1$,

$$\delta(\rho) \simeq \frac{\delta_0}{\sqrt{2\pi x}} e^x.$$

С помощью (3.51) можно найти функцию потока магнитного поля

$$\Psi \simeq \Psi_0(\rho) + \Psi_0'' \frac{\cos(N\varphi)}{\rho} \int_0^{\rho} \delta(\rho) \rho d\rho. \quad (3.52)$$

Оставляя в (3.49) линейные по δ члены и используя (3.51), (3.52), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} = & -\frac{2v^2}{B^{3/2}} \sqrt{\mu} B_r \left\{ \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{2B^2} \right) \left[\frac{d\delta}{d\rho} \cos(N\varphi) \sin\alpha + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\delta N \varepsilon}{qR} \sin(N\varphi) \cos\alpha + \frac{\varepsilon}{q\rho B^2} \cos\theta \cos\alpha \sin(N\varphi) \int_0^{\rho} \delta\rho d\rho \right] - \right. \\ & \left. - \left(\frac{3}{2} - \frac{v_{\perp}^2}{4v^2} \right) \frac{\delta}{R} \sin(\theta - \alpha) \cos(N\varphi) \right\}. \quad (3.53) \end{aligned}$$

В нашей модели $\delta(\rho)$ резко меняется по радиусу, и поэтому основной вклад в (3.53) дает первое слагаемое. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} = \text{Im} \left(v^2 - \frac{\mu B}{2} \right) \sqrt{\frac{\mu}{B_r}} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} \frac{N\delta}{R_0} \left\{ \exp[i(N\varphi - \alpha)] - \right. \\ \left. - \exp[i(N\varphi + \alpha)] \right\}; \quad (3.54) \end{aligned}$$

$$d\alpha/dt = -\omega_{i0} (1 - \varepsilon \cos\theta). \quad (3.55)$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнения (3.54), (3.55) в линейном по δ приближении, понадобятся уравнения невозмущенного движения (3.1). Для упрощения вычисления скачка $\Delta\mu$ в резонансной точке пренебрежем в (3.1) скоростью дрейфа

$$\dot{\theta} = v_{\parallel}/(qR_0); \quad \dot{\varphi} = v_{\parallel}/R; \quad \rho = \rho_c + (v_{\perp}/\omega_i) \cos\alpha,$$

где ρ_c — координата ларморовского центра. Подставляя зависимость $\delta(\rho)$ в виде

$$\begin{aligned} \delta(\rho) &= \delta(\rho_c) \exp[Nv_{\perp}/(R_0\omega_{i0}) \cos\alpha] = \\ &= \delta(\rho_c) \sum_n I_n [Nv_{\perp}/(R_0\omega_{i0})] \exp(in\alpha) \end{aligned}$$

и оставляя в (3.54) только резонансные слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} = \text{Im} \left(v^2 - \frac{\mu B}{2} \right) \sqrt{\frac{\mu}{B_r}} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} \frac{N\delta(\rho_c)}{R} [I_0(x) - \\ - I_2(x)] [\exp(i\Phi_-) - \exp(i\Phi_+)], \quad (3.56) \end{aligned}$$

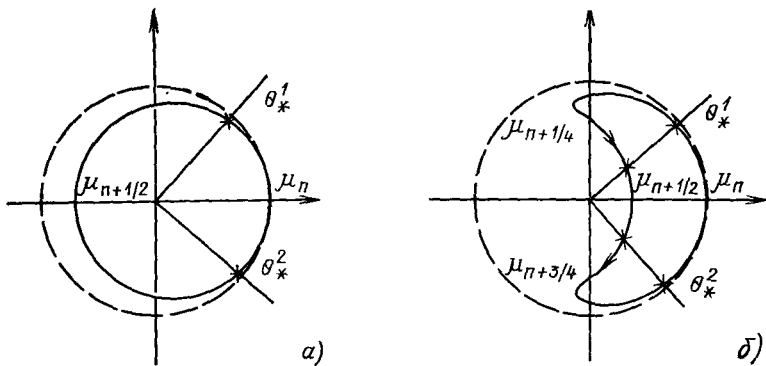


Рис. 45. Резонансные точки на траектории пролетных (а) и захваченных (б) частиц отмечены крестиком

где $x = Nv_{\perp}/(\omega_{i0}R_0)$. Выражения для фаз $\Phi_{\pm} = N\varphi \pm \alpha$ перепишем в виде

$$\Phi_{\pm} = \Phi_0^{\pm} + N \int_0^t \frac{dt}{R} (v_{\parallel} \pm v_{\parallel*}), \quad (3.57)$$

где $v_{\parallel*} = \omega_{i0}R_0/N = \text{const}$. В последнем уравнении можно перейти от интегрирования по времени к интегрированию по углу θ :

$$\Phi = \Phi_0^{\pm} + Nq \int_0^{\theta} (d\theta/v_{\parallel}) (v_{\parallel} \pm v_{\parallel*}) R_0/R. \quad (3.58)$$

Из (3.58) видно, что размер резонансной области, на которой происходит набег фазы $\Delta\Phi \sim 1$, мал ($\Delta\theta \approx v_{\parallel}/(v_{\perp} \sqrt{\varepsilon q N}) \ll 1$), и поэтому резонансное взаимодействие носит локальный характер. Вычислим теперь скачок $\Delta\mu$ в резонансной точке. Рассмотрим сначала пролетные частицы $\kappa > 1$, траектория которых проходит через две резонансные точки θ_*^1 и θ_*^2 (рис. 45). Для определенности положим $v_{\parallel} > 0$, для $v_{\parallel} < 0$ выкладки аналогичны. Обозначим μ_n значение магнитного момента до прохождения первого резонанса ($\theta = \theta_*^1$), $\mu_{n+1/2}$ и μ_{n+1} — соответственно после прохождения резонансных точек θ_*^1 и θ_*^2 . Тогда, интегрируя (3.56) методом стационарной фазы, получаем разностные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \mu_{n+1/2} - \mu_n &= -A(\mu_n) \cos(\xi_n - \Delta(\mu_n)); \\ \mu_{n+1} - \mu_{n+1/2} &= -A(\mu_{n+1/2}) \cos[\xi_{n+1/2} + \Delta(\mu_{n+1/2})]. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Соответствующие приращения фаз получаются в результате интегрирования (3.55) между резонансными точками:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{n+1/2} - \xi_n &= 2\pi Nq \left\{ \frac{12a}{\pi} \left[K\left(\frac{1}{\kappa_{n+1/2}}\right) - F\left(\frac{1}{\kappa_{n+1/2}}, \frac{\theta_*}{2}\right) \right] - 1 \right\}; \\ \xi_n - \xi_{n+1/2} &= 4NqaF\left(\frac{1}{\kappa_n}, \frac{\theta_*}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \xi_n &= \alpha_n - N\varphi_0 - 2\pi n Nq; & \Delta &= Nq\theta_* + \pi/4; & \sin(\theta_*/2) &= \\ &= \kappa \sqrt{1-a^2}; & a &= v_{\parallel*}/v_{\parallel 0}; \end{aligned}$$

$$A = \frac{(2v^2 - \mu B) \delta_0 \sqrt{\pi \mu Nq} [I_0(x) - I_2(x)]}{\sqrt{B_r} v_{\parallel 0} (1-a^2)^{1/4} (\kappa^2 - 1 + a^2)^{1/4}};$$

$K(\kappa)$ и $F(\kappa, \theta/2)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода. Заметим, что для существования резонансной точки необходимо, чтобы выполнялись условия $a < 1$ и $\kappa^2 > 1 - a^2$. Эти неравенства определяют на плоскости v_{\parallel}, v_{\perp} область, где возможен циклотронный резонанс (рис. 46). Рисунок соответствует параметрам установки ТСП, для которой $v/v_{\parallel*} \simeq 2$.

Траектории запертых частиц $\kappa < 1$ имеют четыре резонансные точки, как это схематично показано на рис. 45, б. Соответственно вместо (3.59), (3.60) получим четыре пары разностных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{n+1/4} - \mu_n &= -A(\mu_n) \cos(\alpha_n - Nq\theta_* + N\varphi_0 - \pi/4); \\ \mu_{n+1/2} - \mu_{n-1/4} &= -A(\mu_{n+1/4}) \cos(\alpha_{n+1/4} + Nq\theta_* + N\varphi_0 + \pi/4); \\ \mu_{n+3/4} - \mu_{n+1/2} &= -A(\mu_{n+1/2}) \cos(\alpha_{n+1/2} - Nq\theta_* + N\varphi_0 - \pi/4); \\ \mu_{n+1} - \mu_{n+3/4} &= -A(\mu_{n+3/4}) \cos(\alpha_{n+3/4} + Nq\theta_* - N\varphi_0 + \pi/4). \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Для набег фаз:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1/4} - \alpha_n &= L(\kappa_{n+1/4}); \\ \alpha_{n+1/2} - \alpha_{n+1/4} &= M(\kappa_{n+1/2}); \\ \alpha_{n+3/4} - \alpha_{n+1/2} &= L(\kappa_{n+3/4}); \\ \alpha_{n+1} - \alpha_{n+3/4} &= M(\kappa_{n+1}), \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

где $\gamma_* = \arcsin \sqrt{1-a^2}$; $L(\kappa) = 4qNa\kappa K(\kappa) - M$; $M(\kappa) = 4qNa\kappa \times \times F(\kappa, \gamma_*)$.

Уравнения (3.59) — (3.62) не сохраняют фазового объема. При этом нарушается важное свойство гамильтоновых систем. Это связано с тем, что мы пренебрегли скачком фазы лармовского вращения. Можно, однако, как это обычно делается

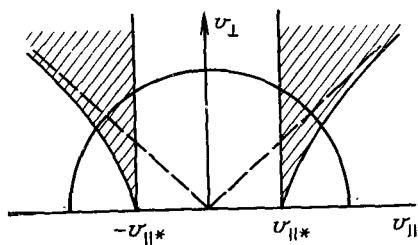


Рис. 46. Области циклотронного взаимодействия частиц с гофрированным магнитным полем (заштрихованы) на плоскости $v_{||}$, v_{\perp} (пунктиром показана граница между запертыми и пролетными частицами)

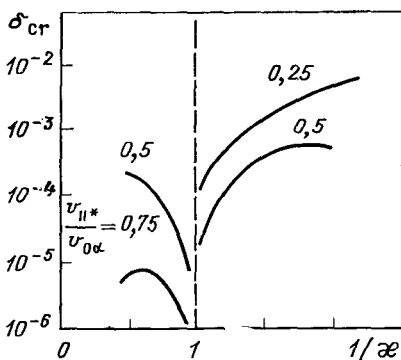


Рис. 47. Зависимость критической гофрировки δ_{cr} от χ при различных значениях параметра $v_{||*}/v_{0x}$

[70], слегка «огрубить» разностные уравнения, чтобы обеспечить сохранение фазового объема. Покажем, как это можно сделать в случае пролетных частиц. Введем новые фазы $\eta_n = \xi_n - \Delta$, $\eta_{n+1/2} = \xi_{n+1/2} + \Delta$ и перейдем от μ к новой переменной $\kappa = [v_{||0}^2 / (2\varepsilon v_{\perp 0}^2)]^{1/2}$. Тогда из (3.59), (3.60) можно найти $\Delta\kappa \simeq (\partial\kappa/\partial\mu)\Delta\mu$:

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_{n+1/2} - \kappa_n &= \hat{A}(\kappa_n) \cos \eta_n; \\
 \eta_{n+1/2} - \eta_n &= 2\pi qN \left\{ \frac{2a}{\pi} \left(K \left(\frac{1}{\kappa_{n+1/2}} \right) - \right. \right. \\
 &- \left. \left. F \left(1/\kappa_{n+1/2}, \theta_*/2 \right) \right) - 1 \right\} + \Delta(\kappa_n) + \Delta(\kappa_{n+1/2}); \\
 \kappa_{n+1} - \kappa_{n+1/2} &= \hat{A}(\kappa_{n+1/2}) \cos \eta_{n+1/2}; \\
 \eta_{n+1} - \eta_{n+1/2} &= 4NqaF \left(\frac{1}{\kappa_{n+1}}, \frac{\theta_*}{2} \right) - \\
 &- \Delta(\kappa_{n+1}) - \Delta(\kappa_{n+1/2}).
 \end{aligned} \right\} (3.63)$$

Для того чтобы уравнения (3.63) сохраняли фазовый объем, достаточно положить

$$\hat{A} = -A(\kappa) \frac{B_T (1 + 2\varepsilon\kappa^2)^2}{4\varepsilon\kappa^2} = \text{const},$$

$\Delta(\kappa_{n+1}) + \Delta(\kappa_{n+1/2})$ заменить на $2\Delta(\kappa_{n+1})$, а $\Delta(\kappa_{n+1/2}) + \Delta(\kappa_n)$ — на $2\Delta(\kappa_{n+1/2})$. Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= 2\pi Nq \{ (2a/\pi) K(1/\kappa) - 1 \}; \\ \Delta_1 &= 4NqF(1/\kappa, \theta_*/2) - 2\Delta(\kappa). \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

Тогда система (3.63) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{n+1} &= \kappa_n + \widehat{A} \cos \eta_n; \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + [\Delta_0/2 + (\Delta_0/2 - \Delta_1) \cos(\pi n)]|_{\kappa=\kappa_{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Четные значения индекса соответствуют первой, а нечетные — второй паре уравнений (3.60). Аналогичным образом можно преобразовать и разностные уравнения для запертых частиц (3.61), (3.62). Оказывается, что четыре пары уравнений можно свести к виду (3.65) с точностью до преобразования Δ_0 и Δ_1 , так что каждый шаг по n будет соответствовать прохождению через одну резонансную точку. Полная траектория запертой частицы соответствует обращению к (3.65) четыре раза. Окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{n+1} &= \kappa_n + \widehat{A} \cos \eta_n; \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + \{ \Delta_0/2 + (\Delta_0/2 - \Delta_1) \cos(\pi n) + \Delta_3 \sin(\pi n/2) \}, \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

где для запертых частиц $\Delta_0 = 4Nq\kappa a K(\kappa)$; $\Delta_1 = 4Nq\kappa a F(\kappa, \gamma_*) - 2\Delta(\kappa)$; $\Delta_3 = 2Nq\phi_0$. Для пролетных частиц Δ_0 и Δ_1 определяются формулами (3.64), а $\Delta_3 = 0$.

Поскольку в правую часть разностных уравнений (3.66) входит индекс n , то, вообще говоря, критерий Чирикова, определяющий области стохастичности, к этим уравнениям неприменим. Формальное применение этого критерия,

$$\min \left\{ \left| \widehat{A}(\kappa) \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\frac{\Delta_0}{2} + \left(\frac{\Delta_0}{2} - \Delta_1 \right) \cos(\pi n) \right) \right| \right\} > 1, \quad (3.67)$$

позволяет правильно оценить критическую гофрировку δ_{cr} , при которой уравнения (3.66) описывают стохастическую диффузию. Зависимость δ_{cr} от κ , которая следует из (3.67), приведена на рис. 47. Как видно из этого рисунка, в окрестности границы между запертыми и пролетными частицами $\kappa \simeq 1$, $\delta_{cr} \rightarrow 0$, т. е. вблизи $\kappa \simeq 1$ всегда существует область со стохастическими траекториями. В зависимости от гофрировки изменяется лишь ширина стохастической зоны.

Перейдем теперь к вычислению коэффициента диффузии частиц, предварительно преобразовав уравнения (3.66). Характерный масштаб по κ в уравнениях (3.66), который обозначим $\Delta\kappa$, определяется из условия изменения функций $\Delta_0(\kappa)$ и $\Delta_1(\kappa)$ на 2π :

$$\Delta_0(\kappa + \Delta\kappa) - \Delta_0(\kappa) = 2\pi; \quad \Delta_1(\kappa + \Delta\kappa) - \Delta_1(\kappa) = 2\pi.$$

Так как $\Delta_0, \Delta_1 \gg 1$, то $\Delta \kappa \simeq \max(2\pi/\Delta'_0, 2\pi/\Delta'_1) \sim 1/(2\pi qN)$. Поэтому функции Δ_0 и Δ_1 можно разложить в ряд и оставить лишь линейные члены разложения $\Delta_0 \simeq \Delta_0(\kappa_0) + \Delta'_0(\kappa - \kappa_0)$, $\Delta_1 \simeq \Delta_1(\kappa_0) + \Delta'_1(\kappa - \kappa_0)$. Выберем в качестве κ_0 такое значение κ , при котором $\Delta_0 = 2\pi k$ и $\Delta_1(\kappa_0) = 2\pi m$. Тогда, опуская члены, кратные 2π в уравнении для фазы, и обозначая $x = \Delta'_0(\kappa - \kappa_0)/2$, получаем

$$x_{n+1} = x_n + \tilde{A} \cos \eta_n; \quad (3.68)$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n + [1 + \lambda \cos(\pi n)] x_{n+1} + \Delta_3 \sin(\pi n/2). \quad (3.69)$$

Здесь $\tilde{A} = A\Delta'_0/2$; $\lambda = 2\Delta'_1/\Delta'_0 - 1$.

Значение величины λ характеризует разницу в набеге фазы частицы при движении между резонансными точками. В частности, когда набег фазы при движении частицы в интервале $\theta^1_* < \theta < \theta^2_*$ равен набегу фазы в интервале $\theta^2_* < \theta < \theta^1_* + 2\pi$ (см. рис. 41), т. е. $\Delta_1 = \Delta_0/2$, то $\lambda = 0$. При $\kappa = 1$, когда частица большую часть времени проводит вблизи $\theta = \pi$, $\Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ и $\lambda \rightarrow 1$. Ниже будем исследовать систему (3.68), (3.69), считая, что параметр λ заключен в интервале $0 \leq \lambda \leq 1$. Для простоты рассмотрим случай пролетных частиц с $\Delta_3 = 0$.

При $\lambda = 0$ система (3.68), (3.69) переходит в хорошо изученную стандартную систему разностных уравнений [70]

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \tilde{A} \cos \eta_n; \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + x_{n+1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

для которой условием стохастизации траекторий (перекрытие «островов») будет условие $\tilde{A} > 1$. При $\tilde{A} \gg 1$ коэффициент диффузии

$$D = \frac{\langle (x_{n+1} - x_1)^2 \rangle}{2n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю частиц, стремится к величине $\tilde{A}^2/4$. Если $\lambda = 1$, то уравнение (3.68) можно просуммировать по двум шагам по n :

$$\left. \begin{aligned} x_{n+2} &= x_n + 2\tilde{A} \cos \eta_n; \\ \eta_{n+2} &= \eta_n + 2x_{n+2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

Легко видеть, что $D(\lambda = 1)/D(\lambda = 0) = 2$ при $\tilde{A} \gg 1$. При произвольных значениях λ и \tilde{A} для расчета D в [89] использовались численные методы. При этом во втором уравнении (3.69) для фазы была добавлена случайная величина u_n , моделирующая случайный сбой фазы частицы [89, 92]:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \tilde{A} \cos \eta_n; \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + [1 + \lambda \cos(\pi n)] (x_{n+1} + u_{n+1}). \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Значения u_n для различных n считались δ -коррелированными, $\langle u_i u_k \rangle = \sigma \delta_{i,k}$, а распределение u_n — нормальным

$$f(u_n) = (1/\sqrt{2\pi\sigma}) \exp[-u_n^2/(2\sigma)].$$

Наличие случайной величины в (3.72) приводит к появлению диффузии и при $\tilde{A} < 1$. С помощью метода последовательных приближений по \tilde{A} [92] нетрудно получить аналитическое выражение для D :

$$D = \frac{\tilde{A}^2}{4} \frac{1 - \beta^{4s} + \cos(\lambda_+ x_0) \beta^{\lambda_+^2} (1 - \beta^{2\lambda_-}) + \cos(\lambda_- x_0) \beta^{\lambda_-^2} (1 - \beta^{2\lambda_+})}{1 + \beta^{4s} - 2\beta^{2s} \cos(2x_0)}, \quad (3.73)$$

где x_0 — начальное значение координаты x ; $\beta = \exp(-\sigma/2)$; $\lambda_{\pm} = 1 \pm \lambda$; $s = 1 + \lambda^2$. При $\sigma \ll 1$ (3.73) переходит в

$$D = \frac{\sigma \tilde{A}^2}{8} \frac{\lambda^2 \cos(\lambda_+ x_0/2) + \lambda_+^2 \cos(\lambda_- x_0/2)}{\sin^2 x_0}. \quad (3.74)$$

Для того чтобы вычислить средний по начальным значениям коэффициент диффузии, необходимо использовать формулу [92]

$$\langle D \rangle = \left(\frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx_0}{D(x_0)} \right)^{-1}.$$

На рис. 48 приведена зависимость $\bar{D} = 4D/\tilde{A}^2$ от \tilde{A} при различных значениях параметра λ . Осциллирующий по \tilde{A} характер зависимости $D(\tilde{A})$ типичен для разностных уравнений типа (3.68) [93]. Характерный выброс D при $\lambda = 0$ связан с «ускорительным режимом», исследованным в работе [94]. На рис. 49 показана зависимость $D(\lambda)$ при $\tilde{A} = 30$. Во всем диапазоне изменения λ , за исключением узкой окрестности точки $\lambda = 1$, коэффициент диффузии практически не зависит от λ и равен значению D при $\lambda = 0$, $D \simeq \tilde{A}^2/4$. При $\lambda \rightarrow 1$ $D \rightarrow \tilde{A}^2/2$. Более детальные расчеты вблизи точки $\lambda \simeq 1$ показывают, что изменение коэффициента диффузии от $D = \tilde{A}^2/4$ до $D = \tilde{A}^2/2$ происходит в очень узкой области $|1 - \lambda| < 10^{-5}$ и сопровождается резкими осцилляциями, которые в масштабе рис. 49 не видны. В режиме развитой стохастичности ($\tilde{A} \gg 1$) фазовая корреляция при переходе от одного резонансного акта к другому нарушается и для частиц справедливо квазилинейное описание. Это возможно лишь в области циклотронного резонанса, показанной на рис. 46, причем для запертых частиц ($\kappa < 1$) условие $\tilde{A} > 1$ приводит к критической гофрировке

$$\delta_{cr} = [\varepsilon/(\pi N q)]^{3/2} 8 \sqrt{2\varepsilon} v_{\parallel 0}. \quad (3.75)$$

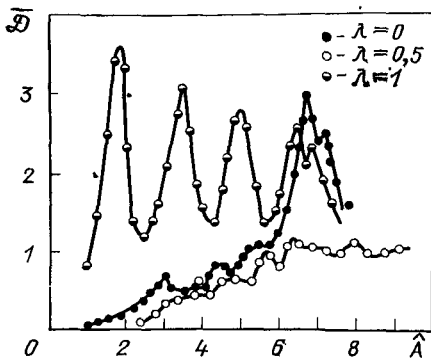


Рис. 48. Зависимость коэффициента диффузии $\bar{D}=4D/A^2$ от A

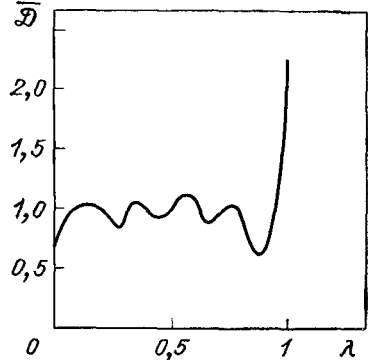


Рис. 49. Зависимость коэффициента диффузии от λ при $A=30$

Для пролетных частиц v_{\parallel} и v_{\perp} имеем

$$\delta_{\text{ср}} = (v/v_{\parallel*}) \varepsilon^{1/2} / (\pi N q)^{3/2}. \quad (3.76)$$

Аномальное рассеяние частиц в пространстве скоростей будет сопровождаться и усиленной пространственной диффузией, скоростью которой можно оценить следующим образом.

Вне узкой резонансной зоны траектория частицы определяется уравнением $p(\rho, \theta, \mu) = \text{const}$, см. (2.9). В резонансной точке α -частица получает приращение импульса $\Delta p \simeq (\partial p / \partial \kappa) \Delta \kappa \simeq A \delta p / \partial \kappa$ и поэтому ее траектория оказывается незамкнутой, а радиальная координата в момент пересечения частицей экваториальной плоскости изменится на

$$\Delta \rho \simeq \Delta p / (\partial p / \partial \rho) \simeq \left(\frac{\pi V}{8} \right)^{1/2} \left(\frac{q}{\varepsilon} \right)^{3/2} \rho_{\perp} \delta \frac{1 + 4\varepsilon \kappa^2}{\kappa \sqrt{\varepsilon} (1 + 2\varepsilon \kappa^2)^{1/2}}. \quad (3.77)$$

Для пролетных частиц $\varepsilon \kappa^2 > 1$ получаем

$$\Delta \rho \simeq (\pi N q^3 / \varepsilon^3)^{1/2} \rho_{\perp} \delta. \quad (3.78)$$

В случае запертых частиц $\kappa < 1$ имеем

$$\Delta \rho \simeq [\pi N q^3 / (8\varepsilon^3)]^{1/2} \rho_{\perp} \delta / (\kappa \sqrt{\varepsilon}). \quad (3.79)$$

По порядку (3.78) и (3.79) сравнимы со смещениями частиц при бесстолкновительной банановой диффузии (3.42), и поэтому циклотронное взаимодействие также сопровождается быстрой радиальной диффузией α -частиц с коэффициентом диффузии $D \simeq \Delta \rho^2 \omega_b$, причем в случае циклотронного резонанса диффундируют не только запертые, но и пролетные частицы. Однако область циклотронного взаимодействия в пространстве имеет конечную ширину $\Delta \kappa$ (см. рис. 46), и поэтому частица пребывает в этой области конечное время $\Delta t \simeq (\Delta \kappa)^2 / (A \omega_b)$. За

это время α -частица успеваеет сместиться по радиусу на расстояние $\delta\rho = \sqrt{D_p \Delta t} \approx q\rho_{\perp} \Delta\kappa / [V\epsilon (1 + 2\epsilon\kappa^2)]^{3/2}$.

При $\kappa \sim 1$ $\Delta\kappa \sim 1$, и поэтому $\delta\rho \approx q\rho_{\perp} / \sqrt{\epsilon}$. При больших токах в плазме, характерных для реактора, $\delta\rho < a$, и поэтому за время пребывания в резонансной области частица не успеет уйти на стенку. Однако явление циклотронного резонанса характерно для токамаков-игниторов с умеренными значениями тока и неполным удержанием α -частиц [22]. В этих условиях $\delta\rho \approx a$ и циклотронный резонанс может приводить к аномальным потерям α -частиц.

Допустим, что все α -частицы, попавшие в зону циклотронного взаимодействия, теряются из плазмы, и оценим потери энергии α -частиц на стенку. Если пренебречь малым кулоновским рассеянием на ионах плазмы, то α -частицы, родившиеся на окружности $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_{0\alpha}^2$, в пространстве скоростей будут приближаться к центру $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = 0$ за счет охлаждения на электронах. Те α -частицы, у которых в момент рождения $|v_{\parallel 0}| < v_{\parallel*}$, полностью передадут свою энергию плазме (см. рис. 46). Остальные частицы окажутся в резонансной области (уйдут на стенку) либо сразу в момент рождения, либо в процессе охлаждения. Для простоты заменим реальную область циклотронного взаимодействия, показанную на рис. 46, тонкой полосой при $v_{\parallel} = v_{\parallel*}$.

Именно такой конус потерь был рассмотрен Я. И. Колесниченко [1] для некоторой гипотетической неустойчивости с фазовой скоростью возмущений $\omega/k_{\parallel} = v_{\parallel} = \text{const}$. В этом случае с помощью (1.21) легко получить зависимость доли энергии, передаваемой плазме, от фазовой скорости $\alpha = v_{\parallel*} / v_{0\alpha}$:

$$W / (\epsilon_{0\alpha} S^{\alpha}) = 1 - \alpha + \alpha^2.$$

Здесь W — энергия, передаваемая α -частицами плазме; $\epsilon_{0\alpha} S^{\alpha}$ — полная энергия рождающихся в термоядерных реакциях α -частиц. Видно, что последнее выражение имеет минимум при $\alpha = 0,5$, равный $W_{\min} = 0,75 \epsilon_{0\alpha} S^{\alpha}$.

Таким образом, максимальные потери энергии при наличии конуса Колесниченко составляют 25%, и поэтому

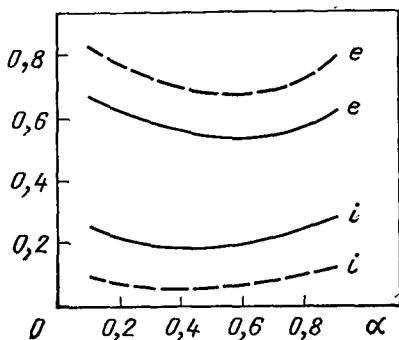


Рис. 50. Зависимость долей энерго- вклада в ионную (i) и электронную (e) компоненты от параметра $\alpha = v_{\parallel*} / v_{0\alpha}$: — $e_0/e_* = 5$; - - - $e_0/e_* = 15$

можно ожидать, что циклотронное взаимодействие не будет приводить к сильному снижению энерговклада α -частиц.

На рис. 50 отдельно показаны зависимости энерговклада в ионный и электронный компоненты от параметра α , рассчитанные по формулам (1.21) при разных значениях отношения ϵ_0/ϵ_* . Этот эффект не дает и существенного перераспределения энерговклада в различные компоненты. В то же время циклотронное взаимодействие может изменить распределение плотности энерговклада по сечению плазменного шнура и перераспределить потоки α -частиц по поверхности первой стенки.

Заключение

В настоящем обзоре были изложены теоретические представления о рождении, термализации и удержании в магнитном поле токамака заряженных продуктов термоядерных реакций. Будущие экспериментальные исследования на токамаках, работающих на дейтериево-третиевой смеси, покажут, какие из рассматриваемых эффектов окажутся действительно важными для успешного осуществления управляемого термоядерного горения.

В обзоре не рассматривалась неустойчивость плазмы при наличии в ней энергичных α -частиц. Этому вопросу посвящена обширная литература, которую можно найти, например, в обзорах [1, 95]. Исследования последних лет показали, что α -частицы могут как изменять условия устойчивости крупномасштабных МГД-мод, так и приводить к кинетическим термоядерным неустойчивостям [1]. Скорость α -частиц превышает альфвеновскую скорость V_A , и поэтому появление в плазме α -компонента может приводить к развитию специфических неустойчивостей, характерных для реактора-токамака. Заранее трудно оценить, как скажутся такие термоядерные неустойчивости на удержании α -частиц в токамаке. Можно попытаться смоделировать в эксперименте на токамаке α -компонента быстрыми ионами, например, с помощью нейтральной инжекции. Однако оказывается, что выполнить моделирование сразу по двум параметрам ($v_{0\alpha}/V_A$ и параметру удержания ρ_L/a) в небольшом эксперименте невозможно. Легко показать, что для этого требуются те же значения произведения na^2 , что и в полномасштабном реакторе.

В обзоре не рассмотрен очень важный для осуществления термоядерного горения вопрос об устойчивости теплового баланса в токамаке. При некоторых зависимостях тепловых потерь от температуры плазмы термоядерное горение может оказаться неустойчивым, так что небольшое возмущение температуры будет приводить к дальнейшему разогреву плазмы или

ее охлаждению и затуханию термоядерных реакций. Эта неустойчивость медленная, с характерным временем нарастания возмущений, равным энергетическому времени жизни τ_E .

Тепловая неустойчивость изучалась в большом количестве работ (см. [96—99]). Очевидно, что результаты исследования теплового баланса зависят от теоретической модели, использованной для описания процессов переноса. Однако в настоящее время нет полной ясности в понимании механизмов переноса энергии в токамаке. По-видимому, аномальные потери энергии по электронному каналу определяются развитием в плазме неустойчивостей и, возможно, имеют нелокальный характер. Теория этого вопроса в настоящее время находится в стадии разработки [100]. Поэтому надежность теоретических результатов, полученных при исследовании неустойчивости термоядерного горения, не очень высока, а решение этой проблемы в условиях реактора-токамака будет достигаться за счет создания надежных систем управления термоядерным горением.

Список литературы

1. Kolesnichenko Ya. I.// Nucl. Fusion. 1980. Vol. 20. P. 727—780.
2. Anderson D., Hamnen H., Lisak M.// NET Report EUR—FU/80/88—90.
3. Lauritsen T., Ajzenberg-Selove F.// Nucl. Physics. 1966. Vol. 78. P. 1—185.
4. Ajzenberg-Selove F.// Ibid. 1984. Vol. A413. P. 1—214.
5. Jarmie N., Brown R. E., Hardkopf R. A.// Phys. Rev. 1984. Vol. C29. P. 2031—2046.
6. Jarmie N., Brown R. E.// Nucl. Instrum. and Methods. 1985. Vol. B 10/11. P. 405—410.
7. Barnett C. F., Ray J. A., Ricci E. e. a.// Atomic Data for Controlled Fusion Research ORNL-5207. 1977. Vol. 2.
8. Dwarakanath M. R.// Phys. Rev. 1974. Vol. C9. P. 805—808.
9. Barnett C. F., Ray J. A., Tompson J. C.// Atomic and Molecular Collision Cross Sections of Interest in Controlled Thermonuclear Research. ORNL-3113. 1964.
10. Мухин К. Н. Введение в ядерную физику. М.: Атомиздат, 1965.
11. Козлов Б. Н.// Атомная энергия. 1962. Т. 12. С. 238—240.
12. Jarvis O. N. Preprint JET-P(85)22. 1985.
13. Cecil F. E., Cole D. M., Wilkinson III F. J., Medley S. S.// Nucl. Instrum. and Methods. 1985. Vol. B10/11. P. 411—414.
14. Weller H. R., Colby P. e. a.// Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 32—37.
15. Peres A.// J. Appl. Phys. 1979. Vol. 50. P. 5569—5571.
16. Hively L. M.// Nucl. Fusion. 1977. Vol. 17. P. 873—876
17. Zaitsev F. S., Smirnov A. P., Yushmanov P. N.// 14th European Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys. Madrid. 1987. Vol. 11D. Part III. P. 1088—1089.
18. Балдин А. М., Гольдинский В. И., Розенталь И. Л. Кинематика ядерных реакций. М.: Физматгиз, 1959.
19. Колесниченко Я. И., Ораевский В. Н.// Атомная энергия. 1967. Т. 23. С. 289—291.
20. Сивухин Д. В.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 81—335.
21. Bittoni E., Fubini A. e. a.// 12th Europ. Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys. 1985. Vol. 9F. Part 1. P. 211—212.

22. Азизов Э. И., Алексеев Ю. А., Бревнов Н. Н. и др.// Атомная энергия. 1982. Т. 52. С. 108—113.
23. Колесниченко Я. И., Фурса А. Д.// Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 806—814.
24. Колесниченко Я. И.// Там же. 1980. Т. 6. С. 973—976.
25. Cordey J. G., Coldston R. J., Mikkelsen D. R.// Nucl. Fusion. 1981. Vol. 21. P. 581—588.
26. International Tokamak Reactor. Phase Two A. Part 1. IAEA. Vienna, 1983.
27. Морозов А. И., Соловьев Л. С.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 177—261.
28. Путвинский С. В.// Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 1245—1247.
29. Rome J. A., Peng Y-K-M.// Nucl. Fusion. 1979. Vol. 19. P. 1193—1206.
30. Hively L. M., Miley G. H., Rome J. A.// Ibid. 1981. Vol. 21. P. 1431—1446.
31. Карулин Н. Е., Путвинский С. В. Препринт ИАЭ-3806/6. 1983.
32. Karulin N. E., Putvinskij S. V.// Nucl. Fusion. 1985. Vol. 25. P. 961—970.
33. Яворский В. А. Препринт КИЯИ-77-4.1977.
34. Колесниченко Я. И., Фурса А. Д., Яворский В. А.// Физика плазмы. 1976. Т. 2. С. 911—922.
35. Колесниченко Я. И., Яворский В. А.// Там же. 1979. Т. 5. С. 126—136.
36. Ohnishi M., Tokunada H., Wakabayashi J.// Nucl. Fusion. 1976. Vol. 16. P. 690—693.
37. Bauer W., Wilson K. L., Bisson C. L. e. a.// Ibid. 1979. Vol. 19. P. 93—103.
38. Hively L. M., Miley G. N.// Ibid. 1977. Vol. 17. P. 1031—1046.
39. Волков Т. Ф.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 3—19.
40. Pfirsh D. Physics of Plasmas Close to Thermonuclear Conditions/ Proceedings of the Course held in Varenna, Italy, 1979. Vol. 1.
41. Hively L. M.// Ph. D Thesis. University of Illinois. 1980. COO-2218-156.
42. Miley G. H., Hively L. M.// J. Nucl. Mater. 1978. Vol. 76, 77. P. 389—395.
43. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Яворский В. А.// Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 178—180.
44. Chrien R. E., Kaita R., Strachan J. D.// Nucl. Fusion. 1983. Vol. 23. P. 1399—1401.
45. Heldbrink W. W., Chrien R. E., Strachan J. D.// Ibid. P. 917—931.
46. Chrien R. E., Strachan J. D.// Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. P. 1953—1964.
47. Heidbrink W. W., Hay R., Strachan J. D.// Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 1905—1908.
48. Murphy T. J., Strachan J. D.// Nucl. Fusion. 1985. Vol. 25. P. 383—385.
49. Heidbrink W. W., Strachan J. D.// Rev. Sci. Instrum. 1985. Vol. 56. P. 501—525.
50. Гореленков Н. Н., Путвинский С. В.// Физика плазмы. 1989. Т. 15. С. 145—150.
51. Кисляков А. И., Крупник Л. И.// Там же. 1981. Т. 7. С. 866—906.
52. Radon J.// Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. 1917. Vol. 69. P. 262—286.
53. Мюллер Р. К., Кавех М., Уэйд Г.// ТИИЭР. 1979. Т. 67. С. 146—169.
54. Ohnishi M., Ao N., Wakabayashi J.// Nucl. Fusion. 1978. Vol. 18. P. 859—866.
55. Hastie R. J. e. a.// Ann. Phys. 1967. Vol. 41. P. 302—331.
56. Nocentini A., Tessarotto M., Engelmann F.// Nucl. Fusion. 1975. Vol. 15. P. 359—370.

57. Goloborodko V. Ya., Kolesnichenko Ya. I., Yavorskij V. A.// Ibid. 1983. Vol. 23. P. 399—407.
58. Kolesnichenko Ya. I., Reznik S. N., Yavorskij V. A.// Ibid. 1980. Vol. 20. P. 1041—1046.
59. Kolesnichenko Ya. I., Reznik S. N., Yavorskij V. A.// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA. Vienna, 1981. Vol. 1. P. 653—662.
60. Lisak M., Anderson D., Hamnen H., Wilhelmson H. Preprint CTH-IEFT// PP-1981-10.
61. Колесниченко Я. И., Путвинский С. В., Резник С. Н. и др.// Физика плазмы. 1981. Т. 7. С. 803—809.
62. Ohkawa T.// Nucl. Fusion. 1970. Vol. 10. P. 185—197.
63. Hively L. M., Miley G. H., Rome J. A.// Ibid. 1981. Vol. 21. P. 1431—1446.
64. Hirshman S. P.// Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. P. 224—229.
65. Boozer A. H.//Ibid. 1976. Vol. 19. P. 149—158; Suckewer S., Eubank H. P., Goldston R. J. e. a.// Nucl. Fusion. 1981. Vol. 21. P. 1301—1309.
66. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.
67. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1967. Вып. 5. С. 3—207.
68. Wesson J. A.// Nucl. Fusion. 1978. Vol. 18. P. 87—109.
69. Brambilla M., Lichtenberg A. J.// Ibid. 1973. Vol. 13. P. 517—524.
70. Chirikov V. V.// Phys. Reports. 1979. Vol. 52. P. 263—345.
71. Konovalov S. V., Putvinskij S. V.// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA. Vienna, 1987. Vol. III. P. 1089—1090.
72. White R. B., Goldston R. J., McGuire K. e. a.// Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. P. 2958—2965.
73. Коновалов С. В., Путвинский С. В.// Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 785—795.
74. Boozer A. H., White R. B.// Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 786—789.
75. White R. B., Boozer A. H., Goldston R. J. e. a.// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA Vienna, 1982. Vol. 3. P. 391—398.
76. Грибов Ю. В., Цаун С. В., Юшманов П. Н. Препринт ИАЭ-3681/7. 1982.
77. Юшманов П. Н.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1987. Т. 16. С. 102—208.
78. Goldston R. J., Towner H. H.// J. Plasma Phys. 1981. Vol. 26 P. 283—307.
79. Dobrott D., Green J. M.// Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. P. 1525—1531.
80. Goloborodko V. Ya., Yavorskij V. A.// Nucl. Fusion. 1984. Vol. 24. P. 627—630.
81. Goldston R. J., White R. B., Boozer A. H.// Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. P. 647—648.
82. Hitchon W. N. G. Hastie R. J.// Nucl. Fusion. 1983. Vol. 23. P. 533—544.
83. Tani K., Takizuka T., Azumi M., Kishimoto H.// Ibid 1983. Vol. 23. P. 657—666.
84. Goloborodko V. Ya., Kolesnichenko Ya. I., Yavorskij V. A.// 12th Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys. Res. Budapest, 1985. Vol. 1. P. 90—92.
85. Yushmanov P. N.// Nucl. Fusion. 1983. Vol. 23. P. 1599—1612.
86. Zaitsev F. S., Smirnov A. P., Yushmanov P. N.// Ibid. 1986. Vol. 26. P. 1311—1318.
87. Hinton F. L.// Preprint FRCR-212. Univers. of Texas, 1980.
88. Путвинский С. В.// Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 36. С. 326—328.
89. Путвинский С. В., Шурыгин Р. В.// Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 933—940.
90. Тимофеев А. В.// Там же. 1975. Т. 1. С. 88—101.

91. Сивухин Д. В.// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1.
92. Путвинский С. В., Тимофеев А. В.// ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 221—233.
93. Rechester A. B., White R. B.// Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. P. 1586—1589.
94. Karney C. F., Rechester A. B., White R. B.// Physica 4D. 1982. P. 425—444.
95. Tang W. M.// Nucl. Fusion. 1978. Vol. 18. P. 1089—1159.
96. Kolesnichenko Ya. I., Reznik S. N., Yavorskij V. A.// Ibid. 1976. Vol. 16. P. 105—111.
97. Furth H. P., Rosenbluth M. N., Rutherford P. H., Stodiek W.// Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. P. 3020—3030
98. Minardi E.// Nucl. Fusion. 1983. Vol. 23. P. 83—86.
99. Абрамов В. А., Бесполуденнов С. Г. и др.// Докл. III конф. по инженерным проблемам термоядерных реакторов. М.: ЦНИИАтоминформ, 1984. Т. 3. С. 570—576.
100. Кадомцев Б. Б.// Физика плазмы. 1987. Т. 13. С. 771—789.

ДИНАМИКА СВЕРХЗВУКОВОЙ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. Б. Н. Брейзман, К. Юнгвирт	3
1. Введение	3
2. Основные уравнения	4
3. Вариационный подход и интегралы движения	8
4. Адиабатическое приближение и приближение геометрической оптики для сверхзвуковых плазмонов	11
5. Составные солитоны	15
6. Автомодельный коллапс ленгмюровских волн	18
7. Законы сохранения при формировании и взаимодействии солитонов	28
8. Образование солитона из сгустка ленгмюровских волн	28
9. Модуляционная неустойчивость (линейная теория)	38
10. Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в одномерной модели	45
11. Флюктуационное формирование солитонов	54
12. Генерация ионного звука самолокализованными плазмонами	58
Приложение 1	61
Приложение 2	64
Список литературы	66
ПРИСТЕНОЧНАЯ ПЛАЗМА В ТОКАМАКАХ. А. В. Недоспасов, М. З. Токарь	68
Введение	68
<i>Глава 1. Теоретические модели описания пристеночной области</i>	<i>71</i>
1.1. Гидродинамическое приближение для плазмы	71
1.2. Кинетическое описание плазмы	74
1.3. Описание нейтрального компонента	78
<i>Глава 2. Рециклинг плазмы на стенке, параллельной магнитному полю</i>	<i>84</i>
2.1. Аналитические методы решения кинетических уравнений для нейтралов	84
2.2. Стационарное состояние плазмы в пристеночной области	89
2.3. Неустойчивость состояния с рециклингом плазмы на стенке	93
2.4. Турбулентный плазменный бланкет	97
2.5. Сравнение с экспериментом	99
<i>Глава 3. Роль рециклинга в конфигурации с дивертором</i>	<i>101</i>
3.1. Характерные области SOL	101
3.2. Одномерное приближение для плазмы в диверторном объеме	102
3.3. Плазма в основной части диверторного слоя	114

3.4. Разделение дейтерия и трития в диверторном слое реактора-токамака	121
3.5. Переход с «конденсацией» плазмы в области рециклинга	125
3.6. Режим газовой мишени	128
3.7. Сравнение с экспериментом	136
Глава 4. Пристеночная область в токамаке с лимитером	141
4.1. Плазма в лимитерном слое, проницаемом для нейтральных частиц	141
4.2. Влияние рециклинга на лимитере на плазму SOL	143
4.3. Откачные лимитеры	147
4.4. Сравнение с экспериментом	151
Глава 5. Примеси в пристеночной плазме токамака	154
5.1. Поступление примесей в плазму	154
5.2. Перенос примесей в периферийной области	156
5.3. Динамика примесей в SOL	159
5.4. Экранирующие свойства SOL	164
5.5. Вывод гелия из реактора-токамака	171
5.6. Роль примесей в тепловом балансе периферийной плазмы	174
5.7. Сравнение с экспериментом	182
Глава 6. Перенос частиц и тепла в пристеночной плазме	185
6.1. Общие сведения	185
6.2. Уравнение для потенциала плазмы (полоидальный лимитер)	186
6.3. Волны дрейфового типа в SOL и их устойчивость	188
6.4. Конвекция турбулентной плазмы в тени полоидального лимитера	190
6.5. Структура турбулентности	195
6.6. Сравнение с экспериментом	197
6.7. Перенос плазмы при стационарных возмущениях магнитного поля	200
Список литературы	203

АЛЬФА-ЧАСТИЦЫ В ТОКАМАКЕ. С. В. Путвинский

Введение	209
Глава 1. Кинетика заряженных термоядерных продуктов в однородной плазме	211
1.1. Ядерные реакции в термоядерной плазме	211
1.2. Энергетические спектры источников термоядерных частиц	217
1.3. Взаимодействие энергичных термоядерных частиц с плазмой	220
1.4. Вторичные реакции	221
1.5. Функция распределения α -частиц в нестационарной плазме	226
Глава 2. Удержание α-частиц в аксиально-симметричном токамаке	229
2.1. (R, Z, ψ) -представление для дрейфовых поверхностей	229
2.2. Потери частиц, рожденных на магнитной оси	233
2.3. Дрейфовое кинетическое уравнение для α -частиц	235
2.4. Прямые дрейфовые потери α -частиц	237
2.5. Распределение потока α -частиц по углам падения на стенку	241
2.6. Обратная задача для прямых дрейфовых потерь термоядерных частиц	243
	317

2.7. Обратная задача для частиц с большим ларморовским радиусом	251
2.8. Потери α -частиц из области удержания в результате рассеяния	254
2.9. Распределение по стенке диффузионных потоков α -частиц	256
2.10. Функция распределения удерживаемых α -частиц с учетом конечной ширины орбит	263
2.11. Бутстрэп-ток, создаваемый α -частицами	269
2.12. Псевдодиффузия α -частиц	274
Глава 3. Влияние возмущений магнитного поля на удержание альфа-частиц в токамаке	278
3.1. Характерные частоты невозмущенного движения α -частиц	278
3.2. Винтовые возмущения магнитного поля	281
3.3. Гофрировка тороидального поля	291
3.4. Бесстолкновительная банановая диффузия в гофрированном магнитном поле	293
3.5. Циклотронное взаимодействие α -частиц с гофрировкой	300
Заключение	311
Список литературы	312

УДК 533.951

Б. Н. Брейзман, К. Юнгвирт. Динамика сверхзвуковой ленгмюровской турбулентности// Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1989.— Вып. 18.

Представлена теория нелинейного взаимодействия ленгмюровских и ионно-звуковых волн в условиях, когда групповые скорости ленгмюровских волн велики по сравнению со скоростью звука. Подробно рассмотрены адiabатические ограничения, связанные с медленностью звуковых возмущений плотности плазмы. Проанализирован ряд элементарных процессов образования и взаимодействия ленгмюровских солитонов. Описана нелинейная стадия модуляционной неустойчивости широкого спектра ленгмюровских волн. Обсуждены последствия локализации ленгмюровских волн в случайном поле звуковых возмущений.

Ил. 14. Библиогр. 58.

УДК 533.951

Недоспасов А. В., Токарь М. З. Пристеночная плазма в токамаках// Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1989. — Вып. 18.

Дан обзор теоретических моделей описания пристеночной области токамаков, приведены решения уравнений переноса плазмы и кинетических уравнений для нейтральных частиц в ситуациях с рециклингом на первой стенке, лимитерах, диверторных пластинах. Рассмотрены условия перехода плазмы в состояние с сильным рециклингом в SOL, исследованы особенности этого состояния: характер течения плазмы, разделение изотопов, переход с конденсацией плазмы в области рециклинга. Проанализирован режим «газовой мишени». Рассматриваются различные подходы к описанию переноса примесей в SOL и в периферийной плазме, исследовано влияние излучения легких примесей на энергетический баланс пристеночной области. Изучается конвективный перенос частиц и тепла в SOL, неустойчивость и турбулентность плазмы, обусловленная спецификой процессов в SOL. Проводится сравнение результатов теории с данными экспериментов. Для специалистов, занимающихся физикой плазмы и проблемами управляемого термоядерного синтеза

Ил. 63. Библиогр. 140

УДК 533.9.01

Путвинский С. В. Альфа-частицы в токамаке.// Вопросы теории плазмы. М. Энергоатомиздат, 1989.—Вып. 18

В обзоре изложена теория удержания термоядерных α -частиц в реакторе-токамаке. Рассмотрены как неоклассические эффекты, так и явления, связанные с нарушением аксиальной симметрии магнитного поля токамака. Заметное влияние уделено диагностике плазмы на основе регистрации уходящих из плазмы α -частиц.

Для специалистов по физике плазмы, проблемам термоядерной энергетики.

Ил. 50. Табл. 4. Библиогр. 100.

Научное издание

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

В ы п у с к 18

Редактор *З. Д. Андреевко*

Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*

Технический редактор *Г. В. Преображенская*

Корректор *Н. А. Войтенко*

ИБ № 3108

Сдано в набор 19.09.89 Подписано в печать 14.02.90
Т-06729 Формат 60×88¹/₈. Бумага типо-
графская № 2 Гарнитура литературная
Печать высокая Усл. печ. л. 19,6 Усл.
кр.-отт. 19,6 Уч.-изд. л. 20,48 Тираж 1150 экз.
Заказ 6856 Цена 4 р. 40 к.

Энергоатомиздат. 113114. Москва, М-114, Шлюзов-
вая наб., 10.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудо-
вого Красного Знамени МПО «Первая Образцовая
типография» Государственного комитета СССР по
печати. 113054, Москва, Валовая, 28.



ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ